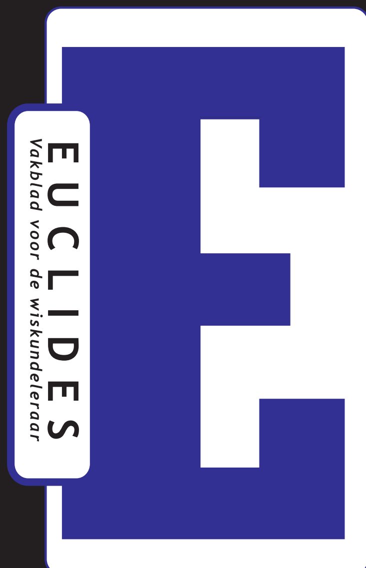
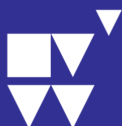


ICT
Vectoren
Combi-uren
Jaarvergadering

juni
2005/nr.8
jaargang 80



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

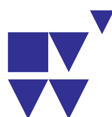
Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19 , 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VVWL: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

8

juni 2005 JAARGANG 80

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee:
Jan Meerhof en Sam de Zoete.

Voorpagina
SARA's Nationaal Rekencluster in Almere, dat bestaat uit 275 Dell PowerEdge™ 1850 servers. Elk daarvan is uitgerust met twee Intel Xeon-processoren die draaien op 3,4 GHz met 2 GB intern geheugen.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Veldraadpleging havo/vwo: nu!

Op dit moment vindt onder wiskundedocenten een cruciale raadpleging plaats door de CEVO. Deze raadpleging betreft inhoud en haalbaarheid van de voorgestelde nieuwe havo/vwo-examenprogramma's vanaf 2007.
Het is voor de nabije toekomst van ons wiskundeonderwijs (en dus van onze leerlingen!) van groot belang dat zoveel mogelijk betrokkenen reageren. De vragenlijst kunt u vinden én invullen op *www.cevo.nl*. De raadpleging stopt waarschijnlijk begin juli, dus veel tijd is er niet meer!

Tijdpad

Hoe verloopt die procedure ten aanzien van de vaststelling van de nieuwe programma's eigenlijk? Een overzicht.
Eind mei zijn, in opdracht van OCenW, vijf zogeheten PEP-commissies (Project ExamenProgramma) aan de slag gegaan met voorstellen van o.m. de NVvW voor havo AB en B, vwo A, AB en B. De commissies bestaan uit vertegenwoordigers van CEVO, Cito en SLO, en twee docenten voorgedragen door de NVvW; de voorzitters komen uit het hoger onderwijs. De taak van deze commissies was niet alleen om de liggende programmavoorstellen nader uit te werken, maar ook om aan te wijzen welke (sub)domeinen in het Centraal Examen getoetst gaan worden (in principe slechts 60% van de totale studielast). Over de inmiddels gemaakte keuzes van de commissies wordt nu advies gevraagd aan de docenten in het voortgezet onderwijs, aan de VSNU (universiteiten) en aan de HBO-raad. Bijstellingen in de nieuwe examenprogramma's op basis van de uitkomsten van deze raadpleging zijn uiteraard nog steeds mogelijk. We mogen er immers van uitgaan dat het ministerie, ondanks de kennelijke tijdsdruk, op zorgvuldige wijze zal omgaan met adviezen en wensen vanuit 'het veld'.
De minister wil vervolgens de uitgevers vóór 1 september informeren over de globale inhoud van de nieuwe programma's, zodat de bijgestelde (= uitgedunde) schoolboeken in 2007 tijdig beschikbaar kunnen zijn.
In en direct na de zomer gaan SLO en Cito aan de slag met de samenstelling van de zogeheten CE-syllabi. In die syllabi worden de voor het Centraal Examen aangewezen eindtermen nauwkeurig en in detail omschreven; ook komt er aandacht voor het gebruik van grafische rekenmachine en formulekaart. In oktober volgt dan een tweede raadplegingsronde.

Centraal Examen krijgt minder nadruk

Zoals bekend streeft het ministerie ernaar dat niet meer dan 60% van de studielast een 'CE-keurmerk' krijgt. De niet-CE-eindtermen worden straks slechts globaal omschreven, waardoor scholen meer vrijheid krijgen in de wijze waarop ze die leerstof aanbieden. Het ministerie heeft in haar document 'Koers VO' diverse wijzigingen aangekondigd in het examenbeleid voor de komende jaren; genoemde beperking van het CE-deel in de examenprogramma's havo/vwo van de exacte vakken is er één van. Al met al is het de bedoeling dat er de komende jaren een ingrijpende accentverschuiving zal plaatsvinden van Centraal Examen naar SchoolExamen. De discussie hierover lijkt onder leraren nog nauwelijks op gang gekomen te zijn, terwijl de trein steeds harder gaat rijden. En hoewel er zeker ook veel pluspunten van een dergelijke verschuiving aan te wijzen zijn, vraag ik me af of er bij de beleidsmakers goed is doorgedacht over de nadelen.

Laat uw mening horen

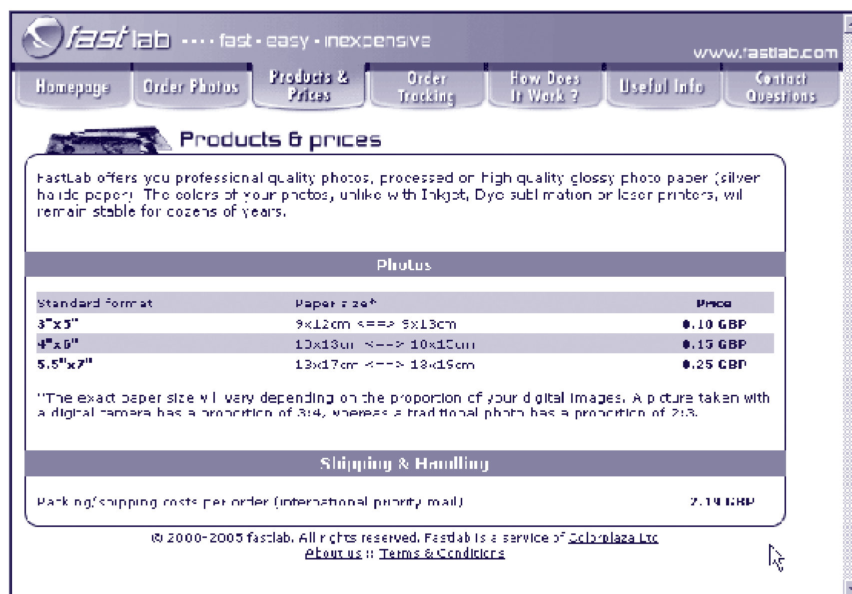
Het is de bedoeling dat alle informatie over de raadpleging en de '2007-voorstellen' rond deze tijd te vinden is op de NVvW-website (*www.nvvw.nl*). Daarnaast kan het nuttig zijn met elkaar van gedachten te wisselen alvorens de CEVO-raadplegingsvragenlijst in te vullen. Maar er is, helaas, veel haast geboden, gezien de deadline begin juli.
Het nieuwe forum op de NVvW-website heeft ons allen ongelukkigerwijs eerder dit jaar op kritieke momenten technisch in de steek gelaten. Tegen de tijd dat u dit leest zal het hopelijk goed bereikbaar zijn. Maak er gebruik van!

FIGUUR 1 Schermafdruk van de website van FotoInsight

VAN EXPERIMENTEREN NAAR IMPLEMENTEREN, DEEL 3

Ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs

[Martin van Reeuwijk en Peter van Wijk]



FIGUUR 2 Schermafdruk van de website van Fastlab

Vooraf

Dit is het derde deel in een serie over de ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs. In het eerste deel (zie Euclides 80-2, oktober 2004) werden de ontwikkelingen van ICT in relatie tot het wiskundeonderwijs van de laatste 15 jaar geschetst. In het tweede deel (zie Euclides 80-3, december 2004) werd de balans opgemaakt en in dit laatste deel staan implementatie, didactische aspecten en de toekomst centraal.

Inleiding

De ontwikkeling van nieuwe ICT-toepassingen voor het wiskundeonderwijs lijkt over het hoogtepunt heen. Bestaande toepassingen worden aangepast, gereviseerd en verbeterd wat resulteert in nieuwe versies van programma's zoals de VU-software, Cabri, Derive, Doorzien en applets. De energie wordt nu gestoken in de implementatie van ICT in het 'dagelijkse' wiskundeonderwijs, oftewel van 'learn to use' naar 'use to learn'. De uitgeverijen zijn aan het zoeken naar vormen om de methoden ook deels digitaal aan te bieden. Op de bijgeleverde cd-roms worden applets, diagnostische toetsen, oefen-materiaal en programma's zoals de VU-software aangeboden. De meerwaarde van de cd-roms zit vooral in de hoeveelheid (oefen)materiaal die nu beschikbaar is, de animaties en andere interactieve hulpjes die het leren voor leerlingen leuker en gestroomlijnd kunnen maken; het teken- en rekenwerk kan worden uitbesteed aan de computer. Een enkele uitgever biedt de digitale materialen via de methodesite aan.

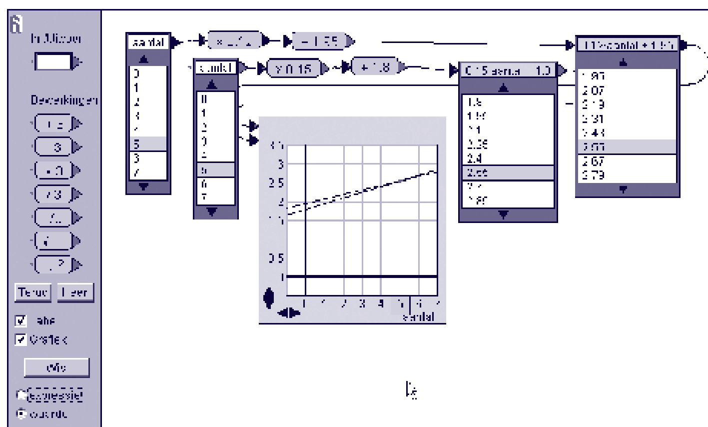
Moeizame implementatie

Op veel scholen staan genoeg(?) computers met voldoende technische kwaliteiten (geheugen, snelheid, internetverbinding). Een groot deel van de leerlingen (meer dan 90%) beschikt thuis over een snelle computer met internetverbinding. Leerlingen van nu zijn met computers groot geworden en maken bijna allemaal gebruik van tekstverwerken met Word, surfen op het internet, computerspelletjes spelen, chatten, MSN'en en e-mailen. Met nieuwe programma's zijn ze snel vertrouwd en leerlingen durven dingen op een computer uit te proberen. In het recent afgesloten onderzoek naar de grafische rekenmachine in het vmbo (Van Reeuwijk (red.), 2005) bleek ook heel duidelijk dat leerlingen in het vmbo (klas 1 en 2 van de basisberoepsgerichte leerweg, LWOO, klas 3 theoretische leerweg) eigenlijk geen problemen hebben met de bediening van een complex apparaat als een grafische rekenmachine waaraan je in het Engels opdrachten moet geven.

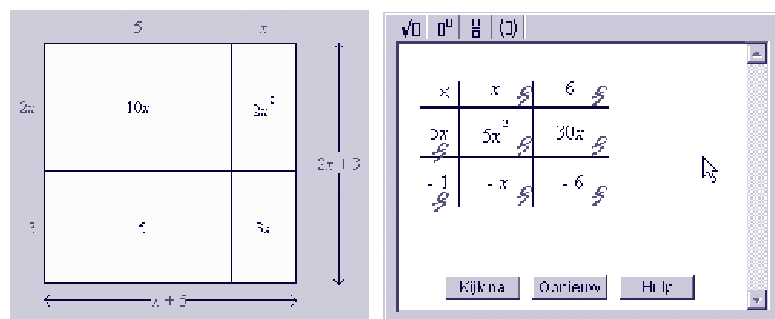
Er lijkt echter sprake van een generatiekloof tussen de huidige generatie leerlingen en de docenten. Leerlingen zijn vaak handiger en vertrouwder met computers en andere ICT-middelen zoals mobiele telefoons, digitale camera's, grafische rekenmachines. Hoe kun je nu als docent en methodeschrijver in je wiskundeonderwijs gebruik maken van deze leefwereld van leerlingen?

ICT-inrichtingen op school

Op scholen is ICT heel verschillend georganiseerd. Bij de introductie en invoering van computers in het onderwijs was het vanzelfsprekend om een of meer computerlokalen in te richten, maar een computerlokaal heeft ook nadelen: je moet een hele les iets met de computer doen; het reserveren en inplannen van het computerlokaal laat weinig flexibiliteit in de lesplanning toe; het computerlokaal is vaak niet beschikbaar, omdat ook andere vakken gebruik willen maken van het computerlokaal. Wil je de computer flexibel kunnen inzetten, dan is het prettiger om in elk (wiskunde)lokaal een aantal computers te hebben waar leerlingen als ze dat willen achter kunnen gaan zitten. Zo wordt de computer een natuurlijk hulpmiddel voor de leerling; je gebruikt het als je hem nodig hebt. Steeds meer scholen creëren werkplekken met een



FIGUUR 3 Algebra Pijlen, voor de websites van Fastlab en FotoInsight



FIGUUR 4 Oppervlaktemodel en vermenigvuldigingstabel

aantal computers. Er zijn ook steeds meer scholen die overgaan tot het aanschaffen van laptops. Met een draadloos netwerk (in de school) kunnen leerlingen overal op internet.

Integratie van ICT in het wiskundeonderwijs

Ondanks deze mogelijkheden om ICT in te zetten wordt ICT nog niet echt geïntegreerd gebruikt. De uitgeverijen bieden weliswaar cd-roms aan bij de boeken, maar dat zijn toch vooral digitale versies van het boek. Het blijkt lastig te zijn om nieuw en creatief gebruik te maken van de mogelijkheden die ICT biedt. De methoden moeten nu ook nog onafhankelijk van internet te gebruiken zijn, een commerciële insteek van uitgeverijen.
Het kan anders. Er zijn voorbeelden van onderwijs waarin ICT echt geïntegreerd is. We proberen daar enige ordening in aan te brengen en onderscheiden vijf categorieën: bron en context, gereedschap, model, oefenomgeving en onderzoeksomgeving.

ICT als bron en context

ICT kan als bron dienen voor authentieke contexten met actuele gegevens en op een eigentijdse manier gepresenteerd. Een voorbeeld is het kostenprobleem van het laten afdrukken van foto's via internet.
Het gaat om bedrijven als FotoInsight en Fastlab waar je digitale foto's heen kunt sturen. De vraag daarbij is: 'Bij wie moet je zijn? Wanneer is welk bedrijf goedkoper?'
De genoemde sites (zie de figuren 1 en 2) presenteren hun gegevens heel verschillend. Voordat een vergelijking kan worden gemaakt, is het eerst nodig om de informatie te interpreteren en te organiseren. Twee wiskundige vaardigheden die je vaak nodig hebt in het echte leven.

ICT als gereedschap

ICT wordt in het wiskundeonderwijs vaak gebruikt als gereedschap. Voorbeelden hiervan zijn de eerder genoemde softwarepakketten Excel, VU-soft en Doorzien, maar ook de grafische rekenmachine; handige tools die het rekenen en tekenen vereenvoudigen. Er zijn ook vele kleine computerprogramma's beschikbaar (onder andere applets) die als gereedschap kunnen worden gebruikt. Denk bijvoorbeeld aan het applet *Algebra Pijlen*, waarmee formules kunnen worden gemaakt en eenvoudig grafieken en tabellen[1]. Een doel van wiskunde is ook het gereedschap te leren gebruiken. Met *Algebra Pijlen* kunnen formules voor de twee websites van de fotobedrijven worden gemaakt en met tabellen of grafieken worden vergeleken (zie figuur 3).

ICT als wiskundig model

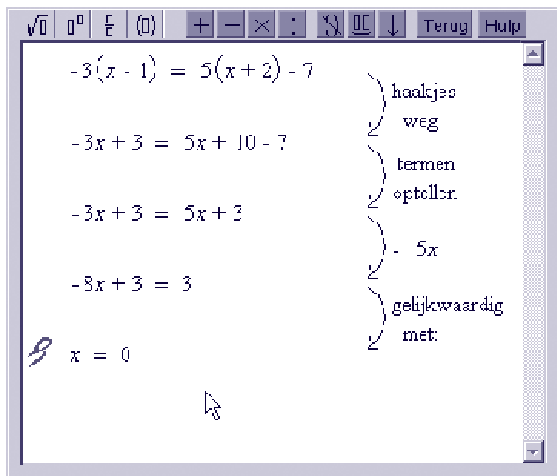
Het applet *Algebra Pijlen* is ook een voorbeeld van een wiskundig model dat gebruikt kan worden om het inzicht in formules verder te ontwikkelen. Denk hierbij aan de volgorde van bewerkingen: 'moet je eerst vermenigvuldigen met 0,12 of eerst 1,95 als startgetal nemen?' en terugredeneren: 'hoeveel foto's kan ik laten afdrukken voor 15 euro?'
Andere voorbeelden zijn het rechthoeksmodel en de vermenigvuldigingstabel. ICT-varianten van deze wiskundige modellen bieden, dankzij de dynamiek en interactiviteit, leerlingen mogelijkheden om inzicht in achterliggende wiskunde te ontwikkelen en vaardigheden op eigen niveau te oefenen (zie figuur 4)[2].

ICT als oefenomgeving

De modelprogrammaatjes kunnen worden aangepast met opgaven waardoor je een oefenomgeving krijgt waarbinnen leerlingen de ontwikkelde vaardigheden kunnen oefenen. Het voordeel van ICT is dat er feedback (goed, fout, per stap, suggesties voor verbetering, ...) gegeven kan worden en dat wat leerlingen doen, wordt geregistreerd (zie figuur 5).

ICT als onderzoeksomgeving

De enorme bron aan informatie die het internet biedt, kan ook door leerlingen worden gebruikt



FIGUUR 5 Vergelijkingen Oplossen, oefenapplet met feedback

Historie wereldrecord 100 meter vrij

Tijd	Datum	Zwemmer	Achterstand in centimeters op het wereldrecord van Van den Hoogenband
47,84	19-09-2000	Pieter van den Hoogenband (Ned)	
48,18	16-09-2000	Michael Klim (Aus)	70,6
48,21	18-06-1991	Alexander Poppov (Rus)	76,7
48,42	10-08-1988	Matt Biondi (VS)	119,8
48,74	24-07-1986	Matt Biondi	184,7
48,95	06-08-1985	Matt Biondi	226,8
49,24	06-08-1985	Matt Biondi	284,3
49,36	03-04-1981	Rowdey Gaines (VS)	307,9
49,44	14-08-1976	Jonty Skinner (Z-A)	323,6
49,99	25-07-1976	Jim Montgomery (VS)	430,1
50,39	24-07-1976	Jim Montgomery	506,1
50,59	23-08-1975	Jim Montgomery	543,6
51,11	03-08-1975	Andy Coan (VS)	639,8
51,12	21-06-1975	Jim Montgomery (VS)	641,6
51,22	03-09-1972	Mark Spitz (VS)	659,9
51,47	05-08-1972	Mark Spitz	705,3
51,94	23-08-1970	Mark Spitz	789,4

FIGUUR 6

in onderzoeksopdrachten. Het probleem wordt gepresenteerd op papier of op een webpagina en het is dan aan de leerlingen om de ICT-communicatie- en informatiemogelijkheden te gebruiken teneinde het probleem op te lossen.
Concrete voorbeelden van zulke onderzoeksvragen zijn:
- Doe een uitspraak over het weer in Nederland over 30 jaar.
- Wat is de kans op een elfstedentocht de komende jaren?
- Onderzoek de wereldrecords van twee sporten en probeer de grenzen van het menselijk presteren te vinden. Gebruik figuur 6 als inspiratiebron.

In deze onderzoeksopdrachten is het belangrijk informatie op internet te kunnen opzoeken en een kritische houding te ontwikkelen ten opzichte van het gebruik van deze informatie.

Meerwaarde van ICT

Met ICT kan het onderwijs voor leerlingen aantrekkelijker, motiverend, prikkelender, leuker en echter worden. Het is eenvoudig om aan actuele en echt realistische problemen te werken waardoor gekunstelde contexten, zoals het probleem over het vergelijken van de tarieven van twee taxibedrijven Atax en Btax, tot het verleden behoren. De wiskunde verandert daarmee dankzij de beschikbare ICT-middelen van wiskunde met gekunstelde gehele getallen naar wiskunde met realistische reële getallen.
Leerlingen kunnen ook zelf met ICT hun wiskundewerk presenteren. Er zijn mooie voorbeelden waarin leerlingen met Powerpoint-presentaties en websites de resultaten presenteren van praktische opdrachten, A-lympiade of de Wiskunde B-dag.
Voor kleinere wiskundige activiteiten als het leren en oefenen van vaardigheden en kennis kunnen spelletjes en kleine, interactieve programma's heel goed worden ingezet. Dit type software biedt ook veel mogelijkheden voor differentiatie waarbij leerlingen op eigen niveau aan de slag kunnen: verdieping, verrijking, extra oefening. Het blijkt dat door deze differentiatie leerlingen met meer plezier met wiskunde bezig kunnen zijn.
Momenteel zijn er VOORUIT!-projecten[3] in uitvoering waarin onderzocht wordt hoe de ICT-mogelijkheden binnen school, zoals elektronische leeromgevingen (ELO) en computeralgebrapakketten, kunnen worden ingezet om het wiskundeonderwijs anders in te richten.

Alleen al het gebruik van nieuwe technische ontwikkelingen in het onderwijs werkt voor leerlingen al uitdagend. Zo merkten de vmbo-tl leerlingen op in het grafische rekenmachineproject: 'Te gek dat wij nu ook met zo'n apparaat mogen werken, eens kijken wat ie allemaal kan.' Tja, leerlingen kunnen veel meer dan wij denken. Als ze uitgedaagd worden, echte problemen voorgeschoteld krijgen die voor hen betekenis hebben, willen ze best op onderzoek uitgaan.
Om ICT op een zinnige manier te integreren in het wiskundeonderwijs, dienen auteur, onderwijsontwikkelaar en docent thuis te zijn in wat er allemaal beschikbaar en mogelijk is. We moeten ons niet afsluiten voor dit soort ontwikkelingen.
En dan zijn er ook nog andere algemeen onderwijskundige en wiskundige vernieuwingen waarvan we op de hoogte dienen te zijn.

Al minstens vijftien procent van de basis- en middelbare scholen experimenteert met nieuwe vormen van onderwijs. Traditioneel onderwijs maakt plaats voor competentiegericht leren, natuurlijk leren, authentiek leren, thematisch en projectgestuurd onderwijs, adaptief onderwijs of vergelijkbare mooie termen. Eén van de belangrijkste gedachten in de nieuwe aanpak is dat docenten geen kennis meer overdragen, maar dat ze leerlingen in hun leerproces - dat er voor elk kind anders uit kan zien - begeleiden.
(Bron: Trouw, november 2004.)

Bij deze nieuwe vormen van onderwijs wordt volop geëxperimenteerd met ICT. De vakken worden vaak losgelaten en er wordt gekozen voor thematisch of projectonderwijs.

Er zijn nieuwe onderwijsmaterialen nodig en daarvoor worden externe partijen ingehuurd. SLO, CPS, APS, Universiteit Twente, Freudenthal Instituut, andere onderwijskundige instellingen spelen op deze behoefte in en adviseren bij de invulling van het nieuwe onderwijs. Idealiter wordt er samen met de scholen nieuw onderwijs ontwikkeld om een invulling te geven aan het nieuwe leren. In de regio Utrecht is er zo een groep vernieuwende scholen (onder de geuzennaam *Scenario 5*) aan de gang gegaan om een invulling voor wiskunde te maken die past binnen thematisch of projectenonderwijs[4]. Ervaringen op deze scholen wijzen uit dat vakinhoudelijke kennis – ook al wordt de vakkenstructuur losgelaten – juist bij de ontwikkeling van nieuw onderwijs onontbeerlijk is. Combineer dit met de benodigde ICT-kennis en dan wordt er nogal wat verwacht van wiskunde-onderwijsontwikkelaars en docenten. Met dit in het achterhoofd is het misschien zo gek nog niet dat de implementatie van ICT in het onderwijs moeizamer gaat dan we graag zouden willen.

Naar de toekomst

Er gebeuren veelbelovende dingen op scholen, waaruit we kunnen leren hoe de toekomst van het wiskundeonderwijs eruit zou kunnen zien. Aan de andere kant is het ook waar dat het nog lang niet voor iedereen duidelijk is, wat de meerwaarde van ICT voor het wiskundeonderwijs is. De ICT-projecten die we eerder hebben genoemd, hebben de nodige kennis en voorbeelden opgeleverd, en de VOORUIT!-projecten zullen dat ook doen. Maar we willen een stapje verder. Aan de hand van enkele ontwikkelingen die nu gaande zijn en vast invloed hebben op het toekomstige wiskundeonderwijs, proberen we te schetsen hoe het wiskundeonderwijs over tien jaar er uit zou kunnen zien.

De wiskundeleeromgeving in 2015

Over 10 jaar is er geen apart wiskundelokaal meer en zijn er alleen incidenteel wiskunde-instructiemomenten. Alleen voor leerlingen die zich gaan verdiepen in de bètarichting, zijn er nog aparte wiskundelessen. Op scholen staan nog wel computers, maar dat zijn werkstations waar je snel en makkelijk kunt scannen of video kunt bewerken. Verder heeft iedereen zijn eigen laptop, althans een apparaat dat wij nu nog laptop noemen, maar dan een geïntegreerd ICT-device is dat de huidige laptop, calculator, agenda, organizer e.d. in één is, draadloos verbonden met het internet en het schoolnetwerk. In alle ruimtes op school staan projectiemogelijkheden waarop de docent (of expert, begeleider, coach, ...) in het groot iets kan uitleggen, demonstreren of waarop een leerling dat zelf kan doen met een beamer of een interactief whiteboard (smartboard).
De leerlingen werken afwisselend individueel en in groepjes aan opdrachten of onderzoeksvragen. Het uitwerken van praktijk- en theorietaken, de samenwerking tussen leerlingen, de begeleiding door de docent en de feedback van de groepsleden gebeuren voor een groot deel via internet. Naast het proces is ook het product een belangrijk onderdeel van een opdracht of onderzoeksvraag. Het resultaat kan een presentatie of (web)publicatie zijn.
Het toetsen gebeurt grotendeels via de computer. De leerling (of docent) kan zelf bepalen wanneer een toets wordt afgenomen. De antwoorden worden deels door de computer gecorrigeerd, maar de rol van de docent blijft belangrijk, want nooit zal alles met de computer af te toetsen zijn. Hetzelfde geldt voor examens die het CITO verzorgt. Door een vernuftig systeem van passwords en random generators kunnen leerlingen flexibel in plaats en tijd hun examens maken.

De wiskunde in 2015

De omgeving waarin leerlingen wiskunde leren, is in 2015 open, flexibel en op maat; de docent speelt een belangrijke rol als deskundige. De vraag die hier direct bij komt kijken is: welke wiskunde wordt er dan nog geleerd? Dankzij de ICT wordt veel arbeidsintensief reken- en tekenwerk uit handen genomen. De grafische rekenmachine doet nu anno 2005 al veel van het grafiekentekenwerk, en toekomstige handzame computeralgebrafaciliteiten zullen veel van het algebraïsche werk uit handen nemen. Welke wiskunde blijft dan over? Hogere vaardigheden, probleem herkennen, organiseren, oplossen, een kritische houding, schatten zullen belangrijk blijven. Lang niet iedere leerling zal meer algoritmes hoeven leren voor het oplossen van vergelijkingen, want dit soort wiskundige activiteiten ‘verdwijnen’ in de black box van calculator of computer. Je moet wél leren hoe je de black box moet bedienen en wat de handelingen en resultaten betekenen, en je moet kunnen inschatten of een antwoord juist kan zijn. Voor een andere groep leerlingen zal de wiskunde in de black box overblijven als object van studie. Dat zijn de leerlingen die doorstromen naar de exacte wetenschappen en daarin verder zullen gaan. Vergelijk hiermee het algoritme voor worteltrekken en logaritmes berekenen. Nu doet iedereen dat met de rekenmachine en hebben we wel een idee wat er gebeurt, maar zijn er slechts enkelen die het algoritme zelf kennen, snappen en kunnen uitleggen. ICT zal dan voor veel leerlingen een tool zijn dat je inzet om je maatschappelijke redzaamheid te vergroten, om informatie op te zoeken. Wiskunde als wetenschappelijke discipline verdwijnt niet, maar zal voor een kleine groep leerlingen blijven zoals het nu ongeveer is. Wel zal wiskunde meer omvatten dan voortgezet rekenen, algemene gecijferdheid, knoppencursus voor de GR en andere strategieën

om de ICT te kunnen gebruiken. Wiskunde is ook een leuk vak met spelletjes en puzzels en andere uitdagingen die het denken stimuleren. Vooral hier kan ICT heel goed ingezet worden; denk maar eens aan al die leuke en mooie spelletjes op het web[5]. De puzzel- en denkaspecten van de wiskunde en het leren herkennen en beschrijven van patronen zijn voor alle leerlingen belangrijk en een vast onderdeel van het curriculum. De spelletjes en puzzeltjes zijn daarmee op zichzelf staande doelen en niet slechts bedoeld als context om formele en abstracte wiskunde uit te ontwikkelen. De interesse voor het mooie vak wiskunde kan dan weer vanuit de leerlingen komen en de wiskunde heeft nog een lang leven voor zich.
Tot slot, er liggen ook kansen vanuit bedrijfsleven en universiteiten die leerlingen willen betrekken bij onderzoeksvragen en het verzamelen van meetgegevens. Nut, bruikbaarheid en toepassing van de wiskunde worden hiermee vergroot en in deze situaties buiten school kunnen leerlingen betrokken worden om zelf onderzoeksvragen te formuleren.

Op scholen wordt ICT vaak gezien als een toverdoos waardoor het onderwijs automatisch vernieuwd wordt, maar gebruik van nieuwe technologie vereist een heroriëntatie op de onderwijskundige uitgangspunten en de onderwijsdoelen van een school. Belangrijk hierbij is steeds de leefwereld van de leerling in het vizier te houden.
Wij hebben er vertrouwen in en kijken uit naar de komende jaren.

Noten

[1] Algebra Pijlen is een applet te vinden op WisWeb (www.wisweb.nl).
[2] Voor het rechthoeksmodel en de vermenigvuldigingstabel zijn ook applets op WisWeb.
[3] VOORUIT!-projecten zijn het vervolg op de ICT-ontwikkel- en ICT-implementatieprojecten. Voorbeelden zijn het GALOIS-project aan het St. Michael College in Zaandam, het project 'Wiskundige vaardigheden op maat' aan de Koninklijke Scholengemeenschap in Apeldoorn en het project 'Een natuurlijke leeromgeving voor bèta en techniek' op het Belcampo in Groningen.
[4] De activiteiten van deze groep scholen worden bijgehouden op de VO-pagina's van de website van het Freudenthal Instituut (www.fi.uu.nl/nl/vo).
[5] Zie bijvoorbeeld de populaire site www.rekenweb.nl.

Referenties

- G.J.Th.A. Bakx: De conferentie Wiskundeles en Informatie-Technologie. In: Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (januari 1990). Utrecht: Freudenthal Instituut; pp. 3-9.
- P. Bergervoet, W. Beulink, V. Jonker, A. Kersten, J. Timmer, E. te Woerd: Het Informatica Middenbouw Project, Ontwikkeling van een cursus informatica voor de middenbouwklassen van het voortgezet onderwijs. Utrecht: OW&OC (1990).
- J. Bronkhorst: Basisboek ICT en Didactiek. Baarn: HBuitgevers (2002).
- L.M. Doorman, H.B. Verhage: Wiskunde met PIT, Werkbladen voor computergebruik bij basisvorming wiskunde. Utrecht: Freudenthal Instituut (1995).
- M. Doorman, G. Vonk: Van schrapkaart tot internet, dertig jaar computers in het onderwijs. In: F. Goffree, Martinus van Hoorn, Bert Zwaneveld (eds.): Honderd jaar wiskundeonderwijs. Groningen: Wolters-Noordhoff (2002).
- P. Drijvers: Wiskunde leren in een computeralgebraomgeving, obstakels en kansen. In: Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, vol. 22(1). Utrecht: Freudenthal Instituut (2002); pp. 36-41.
- P. Drijvers: Learning algebra in a computer algebra environment / Design research on the understanding of the concept of parameter. Proefschrift Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht (2003).
- J. Geerlings, W. Hoekstra, M. van Reeuwijk, P. van Wijk: Wiskunde en Internet. Utrecht: APS (1999).
- H. Harskamp, C. Suhre: Software voor rekenen en wiskunde in de brugklas. Groningen: GION (1999).
- S. Kemme, P. van Wijk: Het schoolonderzoek en de computer bij het nieuwe programma vbo/mavo. Utrecht: APS (1997).
- M. van Reeuwijk: De grafische rekenmachine in het vmbo. Utrecht: Freudenthal Insituut en ICO-ISOR Onderwijsresearch (2005).
- G. Schoemaker e.a.: Wiscom, voorbeelden van computergebruik bij wiskunde (losbladig). Utrecht: OW&OC Utrecht (1987).
- H. Spek, M. Simons: Computers en Wiskunde. In: J.J. Beishuizen, W.A.G. Versteegh (eds.): De betekenis van computers in het voortgezet onderwijs (proefstation West-Nederland). Leiden: DSWO (1993); pp. 263-278.
- H. Stam, P. van Wijk: Computergebruik bij wiskunde. Utrecht: APS (2000).

Websites

- www.wisweb.nl
- www.fi.uu.nl
- www.aps.nl/wiskunde
- www.wiskundeonderwijs.nl
- www.nvvw.nl
- www.wisfaq.nl
- www.ictopschool.net
- www.rekenweb.nl

Over de auteurs

Peter van Wijk (e-mailadres: p.vanwijk@aps.nl) is wiskundedocent aan College De Klop in Utrecht. Hij is daarnaast werkzaam bij het APS als pedagogisch-didactisch medewerker rondom wiskunde en ict&leren.
Martin van Reeuwijk (e-mailadres: M.vanreeuwijk@fi.uu.nl) werkt bij het Freudenthal Instituut. Zijn interesses liggen op het gebied van de algebra, toetsen en technologie. Martin was onder andere projectleider van de ICT-projecten WisWeb en WELP.
Beiden zijn de initiatiefnemers van de ICT-conferentie voor het wiskundeonderwijs die inmiddels vier keer heeft plaatsgevonden.

VAN VECTOREN NAAR LINEAIRE RUIMTES

Beginnen met 'vectoren' op de basisschool is mogelijk en biedt perspectieven.

[Harrie Broekman]

Vooraf

In een vorige bijdrage[1] over het werk van Pierre van Hiele werd aandacht geschonken aan zijn theorie over de niveaus van denken en argumenteren die kinderen doorlopen als ze zich (meetkundig) ontwikkelen. Daarbij kwam naar voren dat je als leraar de niveauovergangen kunt beïnvloeden door aangepast onderwijs[2]. Hierbij is het van groot belang dat er voldoende tijd is voor het leerproces van de leerlingen en dat dit niet op een te hoog niveau wordt benaderd.
Dit artikel gaat in op een belangrijk aspect van een stapsgewijze aanpak van leren, namelijk het starten op het visuele niveau. We kiezen daarvoor bewust het onderwerp 'vectoren', omdat dit niet alleen een handige taal levert om verplaatsingen te beschrijven, maar ook als opstap kan dienen naar lineaire ruimtes. Als zodanig zou dit onderwerp deel uit moeten maken van het ß-curriculum van havo/vwo. De voorbeelden die gebruikt worden komen, als hommage aan Van Hiele, uit de methode Van A tot Z[3] en zijn boek Structuur.

Vroeg starten; intuïtief en visueel

'Vectoren' zijn een vanzelfsprekend vakonderdeel en hulpmiddel voor zowel wiskundigen als diegenen die wiskunde gebruiken. Dientengevolge houden, internationaal, ontwikkelaars en onderzoekers van wiskundeonderwijs zich ermee bezig. Het is een voorbeeld van leerstof waarbij een opbouw mogelijk is vanaf grondniveau (visueel niveau) via het eerste (beschrijvende) niveau naar een theoretisch niveau. Voor Van Hiele was en is dat alleen al voldoende reden om er intensief mee bezig te zijn. Daarnaast is van groot belang de mogelijke opstap naar lineaire ruimtes en dynamische systemen, dus zowel voor de verdere wiskunde als voor de vakken natuurkunde en economie, en daardoor voor een samenhang in het curriculum van havo/vwo.
Een belangrijke praktische moeilijkheid bij een behandeling van meetkunde met behulp van vectoren is echter de noodzaak van een uitgebreide intuïtieve introductie. Deze is nodig om een vectortaal en een vectornotatie op te bouwen voordat de formele ontwikkeling van de meetkunde kan beginnen. Zo'n

intuïtieve introductie kan en moet al heel vroeg beginnen met het 'bestuderen op visueel niveau' van bijvoorbeeld symmetrie van behangpapier of andere ornamenten. Van Hiele gebruikt figuurtjes op roosterpapier (zie figuur 1).

Opstap naar lineaire ruimtes

Indien niet gekozen wordt voor een meetkunde met behulp van vectoren, maar voor vectoren als opstapje naar lineaire ruimtes, zal eveneens een intuïtieve introductie nodig zijn. Het is daarbij van belang in gedachten te houden dat het niet noodzakelijk is altijd praktische situaties voor die intuïtieve start te kiezen. Wel dient benadrukt te worden dat de basis van het leren iets moet zijn waarmee de leerling al ervaring heeft. Het is bovendien van belang dat er door de leerling gemanipuleerd kan worden met objecten (bijvoorbeeld blokken, maar ook foto's, tekeningen, schetsjes, grafieken, diagrammen).
Als er niet al in het basisonderwijs begonnen wordt met het leggen van een intuïtieve basis voor vectoren – de meetkundige intuïtie moet ontwikkeld worden - zal er toch een insteek nodig zijn met veel visuele ondersteuning. Veel plaatjes om het 'intelligente gissen' te stimuleren. Maar het lijkt wel of we daar in het voortgezet onderwijs geen tijd voor hebben - of vinden we dat 'te kinderachtig'? Of is het zo dat het, door de grote gerichtheid op zelfstandigheid en eigen verantwoordelijkheid van de leerlingen, de docent moeilijk gemaakt wordt de leerlingen te sturen en hen op z'n tijd af te remmen ten behoeve van reflectie? En dat terwijl die reflectie hard nodig is!
Toch is er een aanpak mogelijk die werkt en zinvol is. Een aanpak waarbij in feite jaren eerder met 'vectoren' begonnen wordt en de leerlingen een lange ontwikkeling doormaken. Een ontwikkeling overigens, waar de mensheid een nog veel langere periode voor nodig had. Simon Stevin bijvoorbeeld gebruikte ook al vectoren om krachten voor te stellen, maar hij noemde ze geen vectoren en dacht zeker nog niet aan lineaire ruimtes.

De aanbevolen vroege start, in het basisonderwijs, heeft niet de bedoeling om daar al expliciet te gaan werken met een formeel systeem (lineaire vectorruimte), maar wel om een lange, noodzakelijke aanloop te nemen op het visuele niveau om een ontwikkeling naar het beschrijvende niveau mogelijk te maken.
Overigens is het jammer dat er in ons land geen aandacht was voor het werk van bijvoorbeeld Paul C. Rosenbloom. Deze deed al tijdens het eerste internationale congres over wiskundeonderwijs (Lyon, 1969) het voorstel om gebruik te maken van symmetrie van tweedimensionale ornamenten. Pas na introductie hiervan en de ontwikkeling van een vectortaal en een notatie om translaties aan te geven kwamen zg. strip-ornamenten aan bod die 'bijna 1-dimensionaal' zijn. Dus eerst het vlak en dan pas de 'getallenlijn'. Ook Van Hiele vond dat jammer, maar 'het is dan ook veel beter om al op de lagere school te beginnen', al dan niet ondersteund door het gebruik van ICT (zie figuur 2). 'Verschuiving van onderwerpen naar een andere leerperiode is onder nader te bepalen voorwaarden zeker mogelijk. Waarschijnlijk zal zulk een verschuiving een verbetering van de didactiek ten gevolge hebben. Immers er worden thans veel te weinig onderwerpen behandeld op een laag niveau. Veel onderwerpen ontmoeten de leerlingen thans voor het eerst in een

FIGUUR 1 Uit Van A tot Z, M-1a, pag. 74-75

In figuur 3 is een gedeelte van een kattekop getekend.

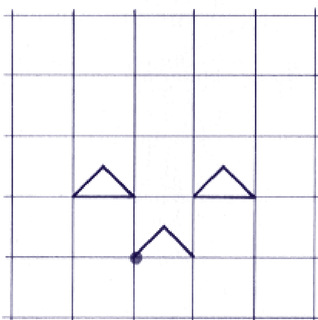


fig. 3

Jij gaat de kattekop afmaken.

a Neem figuur 3 over op roosterpapier.
Ga eerst vanaf het rode punt een hokje naar links en een hokje naar boven. Wij geven dit aan met $(-1, 1)$.

b Trek nu een lijntje dat nul hokjes naar rechts gaat en twee hokjes naar boven. Wij schrijven $(0, 2)$.

c Maak de tekening af door achter elkaar de lijntjes te tekenen $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, -2)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$.

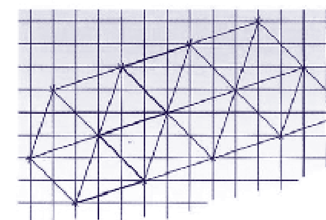
FIGUUR 2 Uit Structuur, pag. 87 (werkelijkheid, individu en taal)

Bij de interactie tussen werkelijkheid en individu kan de taal zeer bevorderlijk werken. In de onderstaande 'driehoekjesstructuur' kan men de zijden van één zo'n driehoekje aanduiden met behulp van vectoren.

Deze zijn: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

In de structuur kan men 'zagen' waarnemen. De zaag in de figuur hierna wordt bepaald door de vectoren:

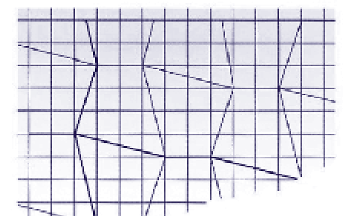
$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots$



Het tekenen van zo'n vierhoekjesstructuur kan met behulp van zagen gemakkelijk worden uitgevoerd. Deze staan hiernaast:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Op roosterpapier kan men van die zagen gebruikmaken om een vierhoekjesstructuur te tekenen:



abstracte vorm, terwijl het toch heel goed mogelijk geweest zou zijn de leerlingen er eerst bijvoorbeeld aanschouwelijk mee te laten handelen.’[4]
Zie figuur 3 en 4.

Wiskunde: bezig zijn met structuur

Van belang voor de keuze van elk onderwerp, dus ook vectoren, is het doel dat men ermee nastreeft, niet alleen op een bepaald moment, maar ook over een langere periode gezien. Daarbij speelt een niet onbelangrijke rol hoe we denken over wat wiskunde is. Daarover kunnen dikke boeken geschreven worden, maar op deze plaats wil ik het graag houden bij het volgende: ‘Wiskunde (ook de schoolwiskunde) is, naast een manier om al of niet praktische situaties te beschrijven en een hulpmiddel om te voorspellen, vooral ook een bezig zijn met structuur.’ Structuur als houvast voor het verder leren en het zich ontwikkelen van de leerling. Dit betekent dat er op elk niveau geredeneerd, geargumenteerd zal moeten worden met behulp van een bijpassende taal.
In een tijd dat men zich vooral druk leek te maken om de vraag of er meer was dan het ‘leren maken van standaardopgaven’ en/of het ‘vormen van de geest van de leerling’, schreven Van Hiele en zijn vrouw: ‘... dat de leerlingen ervaren, hoe men een kennisgebied, waarvan men globale strukturen bezit, door analyse voor objectieve beschouwingen toegankelijk kan maken.’[5]

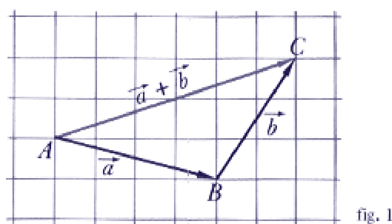
Doelstellingen; een driedeling

Van Hiele hanteerde het liefst de volgende driedeling van doelstellingen om een discussie op grond van emoties te omzeilen:
- *objectieve formele doelen*; deze bepalen de onderlinge samenhang, de structuur van het leerprogramma. (Als langetermijndoelen bijvoorbeeld: een simpele opbouw van de Euclidische meetkunde als lineaire vectorruimte met scalair product; natuurlijke integratie met algebra; H.Br.);
- *objectieve materiële doelen* (nut voor ‘elders’);
- *subjectieve doelen*; deze mogen geen invloed op het verplichte leerprogramma hebben. (Iedere docent of sectie op een school heeft het recht om keuzes te maken ten aanzien van wat meer of minder nadruk krijgt. Zo zijn er docenten die veel meer doen aan het stimuleren van het gebruik van ICT dan voorgeschreven is. Anderen trekken extra veel tijd uit voor het laten ervaren van het plezier van zelf iets maken/ontdekken. Enzovoort. H.Br.)

Het al of niet invoeren van een onderwerp als vectoren hangt in belangrijke mate af van de vraag of hiermee formele doelen verwezenlijkt kunnen worden, en/of materiële doelen.
Naast een aantal objectieve formele doelen, zoals de grotere samenhang van meetkunde en algebra, zijn er inderdaad ook een aantal materiële doelen aan te geven voor het onderwijzen en leren van vectoren. Het betreft het ‘elders nuttig zijn’ van vectoren, bijvoorbeeld in de stereometrie, de goniometrie, de natuurkunde en niet te vergeten de invoering van de negatieve gehele getallen met de bijbehorende berekeningen. Met name de materiële doelen hebben in het verleden tot heftige discussies geleid ten aanzien van de stereometrie en de goniometrie. Zie bijvoorbeeld Wijdenes in Euclides 39.
Van belang voor de nabije toekomst (2007 en daarna) is met name het gebruik van vectoren en lineaire ruimtes in de natuurkunde, maar ook het mogelijke

FIGUUR 3 Uit Van A tot Z, M-1b, pag. 31

het optellen van vectoren



Het punt A krijgt de translatie $(4, -1)$. Het beeldpunt is B. Vervolgens krijgt punt B de translatie $(2, 3)$. Het beeldpunt is C. Je kunt zeggen dat punt C het beeld is van punt A voor de samenstelling van de translaties: eerst $(4, -1)$ en daarna $(2, 3)$.
Je schrijft $(4, -1) + (2, 3) = (6, 2)$.

FIGUUR 4 Uit Van A tot Z, H-4b, pag. 1

Eigenschappen van vectoren

Definitie: Ieder geordend getallenpaar $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ noemt men een *tweedimensionale vector*.

We zullen deze vectoren aanduiden met vette letters: $\mathbf{p} = [a, b]$ of $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. De verzameling van alle tweedimensionale vectoren duiden we aan met $\mathbb{V}_2$.

Definitie: De som van de vectoren $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ is de vector $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$.

Stelling: Voor alle $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{V}_2$ geldt: $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$.

a. Bewijs deze stelling.

Stelling: Er bestaat een neutraal element $\mathbf{0}$ voor de vectoroptelling, zodat voor alle $\mathbf{p} \in \mathbb{V}_2$: $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{p}$.

b. Noem de kentallen van dit neutrale element.

gebruik van vectoren bij de ontwikkeling van het rekenen met negatieve gehele getallen.

Natuurkunde

- In een artikel in Euclides 61(1) met als titel 'Een eerste kennismaking met vectoren' wordt Simon Stevin genoemd, omdat hij een der eersten was die vectoren gebruikte om krachten voor te stellen, hoewel hij de term 'vector' nog niet invoerde.
- In Euclides 45(10), pag. 377-384, verdiept Vredenduin zich in de fictieve vraag van leerlingen naar het verband tussen de vectoren in de wiskunde (elementen van een vectorruimte) en de vectoren in de natuurkunde (in elk geval een grootheid met een grootte en een richting; vrij, glijdend?). Zijn conclusie – die gedeeld wordt door Van Hiele - is in elk geval duidelijk: het is zeer wenselijk, dat fysici en mathematici zich met elkaar verstaan om van elkaar te begrijpen wat ze onder een vector verstaan. Daarmee kan verwarring bij hun leerlingen immers voorkomen worden.

Gehele getallen

Een van de aspecten van schoolwiskunde waarmee heel verschillend wordt omgegaan, betreft het introduceren van en gaan werken met negatieve (gehele) getallen. Allerlei insteken zijn daarbij gekozen: van koude en warme blokjes, bezit en schuld, het permanentieprincipe (4 – 1=, 4 – 2=, 4 – 3=, 4 – 4=, 4 – 5= ?, 4 – 6= ?, ...), maar ook 'pijltjes langs de getallenlijn'. Dit laatste komt bij veel leerlingen over als gezocht, in tegenstelling tot het 'aftrekken van 2-dimensionale vectoren', zoals door Van Hiele gepropageerd en uitgewerkt werd.
Zie kader en figuur 5.

Tijdens het International Congress of Mathematicians te Warszawa, augustus 1983, werd door Freudenthal in zijn voordracht 'The Implicit Philosophy of Mathematics History and Education' veel lof toegezwaaid aan Pierre van Hiele in verband met diens benadering van de negatieve (gehele) getallen met vectoren in plaats van via de veelal gebruikelijke voortzetting van rijtjes aftrekkingen:
'... It is the way negative numbers have been taught until quite recently, when new didactic ideas emerged. I will focus on one of them only, the number line, on which negative numbers are viewed as movable vectors, which are being operated on as such. It is so splendid an idea that one marvels why it has not worked didactically. P.M. van Hiele has been the first to indicate the reason, which is so simple that one marvels even more why nobody before him hit upon it: dimension one is the least appropriate to give vectors the chance they deserve.
If you don't believe it, look up in all those textbooks the desperate attempts visibly to separate, add and subtract vectors, which unfortunately in one dimension cover and eclipse each other.' (...)
'In Van Hiele's newest approach negative numbers arise in a two-dimensional frame.'
(ICME 1983 Proceedings; pp. 1698-1699)

FIGUUR 5 Uit Van A tot Z, M-2a, pag. 66-67

het optellen van vectoren

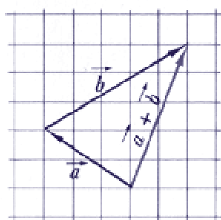


fig. 7

In figuur 7 is bij de vector $\vec{a}$ de vector $\vec{b}$ opgeteld.
De somvector is $\vec{a} + \vec{b}$.

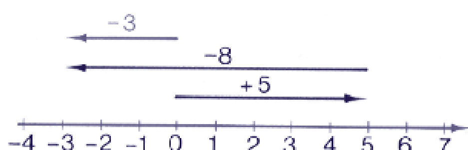
a Wat zijn de kentallen van de vector $\vec{a}$?
Wat zijn de kentallen van de vector $\vec{b}$?
Wat zijn de kentallen van de vector $\vec{a} + \vec{b}$?

Bereken de somvector van de volgende vectoren:

b $\binom{2}{3}$ en $\binom{-5}{-1}$ d $\binom{-2}{2}$ en $\binom{4}{-2}$

c $\binom{-2}{-4}$ en $\binom{-3}{-1}$ e $\binom{3}{3}$ en $\binom{-5}{5}$

Op de getallenrechte worden getallen opgeteld als vectoren.



Zo zie je dat (+ 5) + (– 8) = (– 3).

FIGUUR 6 Uit Structuur (bouwdozen): Structuur als dé belangrijkste bron van begrijpen

In de goede oude tijd had je als speelgoed 'bouwdozen', waarvan het belangrijkste onderdeel bestond uit balken, opgebouwd uit één, twee, drie, vier, vijf, zes kubussen. Deze onderdelen vormden een structuur die zeer belangrijk was voor de ontwikkeling van het getalbegrip. Het is te betreuren dat men tegenwoordig de kinderen liever duurder speelgoed geeft. Als de kinderen zelf daar meer de voorkeur aan geven, zal dit eerder zijn toe te schrijven aan een modeverschijnsel of het ergens bij willen horen, dan dat het nieuwe speelgoed meer biedt. De eenvoudige blokken maken vele structuren mogelijk en daardoor kunnen de kinderen zich daarmee meer uitleven. Anders dan de voorgeconstrueerde hijskranen, tankstations, ziekenwagens, geven de mozaïekdozen en bouwdozen veel meer gelegenheid tot eigen initiatieven en dat wordt door vrijwel alle kinderen gewaardeerd.



Een eentje, tweetje, drietje en viertje.

De 'blokken' van vroeger nodigden uit tot het spreken van een 'tweetje', een 'drietje', een 'viertje', enzovoort. Men zou het uitdagend karakter van de blokken kunnen vergroten door er een aantal aan toe te voegen.

'Struktuur'
Het belang van het van de grond af opbouwen van begrippen, om ze een belangrijk bestanddeel te laten worden van de wiskundige gereedschapskist van onze leerlingen, hield Van Hiele jarenlang bezig. Het resulteerde in een steeds belangrijker plaats in zijn werk voor visuele structuren als start en ondersteuning van leren en ontwikkeling. 'Visual structures in which thinking is unnecessary, structures on which one can base conclusions without further reasoning.' Prachtige voorbeelden hiervan zijn te vinden in het boek *Struktuur*, dat dan ook meer foto's bevat dan tekst. In een latere uitgave (*Structuur*, 1997, Thieme) is beduidend meer toelichtende tekst opgenomen. Zie figuur 6.

Vectoren!
Belangrijk in de begeleidende rol van de leraar is het aanreiken van voorbeelden waaraan de leerling kan werken op eigen niveau, en waarop deze met hulp van vragen ook kan reflecteren. In de diverse deeltjes van 'Van A tot Z' wordt - evenals (helaas) in veel van de nieuwe leerboeken - deze aanzet tot reflecteren nauwelijks verder uitgewerkt dan via terugkijkopgaven aan het eind van een hoofdstuk of paragraaf. Het hoorde bij de taak van de leraar, samen met de taak van het aandragen van een stukje vaktaal. Maar dat zal dan een duidelijker plaats moeten krijgen naast de 'zelfwerktijd'. Willen we alle leerlingen helpen echt bezig te zijn met wiskunde van intuïtief tot abstract, dan zijn twee dingen nodig:
1. Een zodanige onderwerpkeuze dat een inzichtelijke opbouw mogelijk is. Het onderwerp vectoren biedt die mogelijkheid: van verplaatsingen naar lineaire ruimtes en verder.
2. Het moet mogelijk zijn voor de leraar daar waar nodig sturend op te treden ten aanzien van reflectie en het aandragen van een stukje vaktaal - zoals, opnieuw, bij vectoren.

Nogmaals hulde aan Van Hiele
Het werk van Van Hiele levert ons tenminste het volgende drietal aandachtspunten.
1. Voortdurend aansluiten bij wat de leerling al weet/kent/kan van en met het onderwerp waaraan gewerkt wordt. Dat wil ondermeer zeggen: zoveel mogelijk op aangepast niveau starten.
2. Aandacht voor onderwijsleeractiviteiten, met een keuze voor een systematisch begeleid leerproces waarbij rekening gehouden wordt met de niveaus van denken en argumenteren. Dit kan versterkt worden door een ingebouwd herhaalsysteem om telkens opnieuw aansluiting te vinden met aanwezige kennis, door een versneld opnieuw doorlopen van het leerproces ('telescoped reteaching').
3. Doelstellingenkeuze: het gaat om begrip en inzicht. Maar van belang daarbij is eveneens, dat de leerling zicht krijgt op de manier waarop hij door gerichte aandacht niveauverhogingen kan realiseren, zelf of met hulp. Dus vooral 'knowing as a process of knowledge-getting' met daarbij wel degelijk ook 'mathematical knowledge as a product'.

Ook nu nog!
Uit het voorgaande wordt vermoedelijk al wel duidelijk dat de auteur dezes van mening is dat we in ons wiskundeonderwijs veel konden en kunnen leren van de ideeën van Van Hiele. Niet dat hij alles zelf zonder invloed van anderen bedacht of uitgewerkt heeft, maar wel omdat hij het denken over wiskundeonderwijs mee richting heeft gegeven[6]. Het feit dat de hiervoor genoemde fundamentele aannames en aandachtspunten uit een ander tijdperk stammen, wil bepaald niet zeggen dat ze van tafel geveegd moeten worden – maar uiteraard wél dat we ze kritisch moeten bezien vanuit de 'nieuwe omstandigheden'. Zo kan het gebruik van de computer niet alleen stimulerend werken bij de start van vectoren (verplaatsingen), maar zeker ook bij het werken met lineaire ruimtes (matrices bijvoorbeeld) en, vanzelfsprekend, dynamische systemen.
Begrip en inzicht stimuleren blijft steeds voorop staan, voor alle leerlingen.

Noten

---

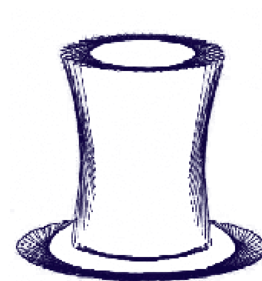
[1] Harrie Broekman: Helpen met leren helpt! Een hommage aan Pierre van Hiele. In: Euclides 80 (5), pp. 266-270.
[2] Freudenthal verwoordde het belang van de theorie van Van Hiele als volgt: 'In mijn wiskunde-onderwijskundig leerproces is de kennis van Van Hieles niveaus cruciaal geweest omdat ik daarbij de reflectie als niveauverhogende activiteit herkende: bewustmaking van je onbewust kennen, weten, handelen, het erop reflecteren – hoe weet je dat, waarom doe je dat – en ten slotte het verwoorden van het resultaat van je analyse, soms door beproefde taalmiddelen een nieuwe functie toe te kennen, soms door nieuwe te scheppen.'
(Freudenthal, in de Nederlandse voorversie van zijn China Lectures, pp. 355)
[3] De methode 'Van A tot Z' van Van Hiele was een volledige reeks werkboeken en werkschriften voor alle leerjaren van het voortgezet onderwijs vanaf de jaren '60. Aan de methode lag een aantal duidelijk geformuleerde didactische principes ten grondslag. Ook in het huidige wiskundeonderwijs zijn een aantal daarvan zeker nog 'te herkennen', maar niet altijd meer te zien als een bepalend criterium voor leerstofkeuze en ordening:
- een intuïtieve inleiding in de meetkunde
- een geleidelijke groei naar deductief denken
- tekst in overeenstemming met het ontwikkelingsniveau van de leerling.
Met name het gebruik van vectoren en de opbouw van het begrip, het inzicht en de vaardigheden in het hanteren ervan kan illustratief zijn voor de toenmalige ideeën van Van Hiele, ideeën die velen over de hele wereld geïnspireerd hebben tot nadere doordenking van hun (wiskunde)onderwijs. Overigens is hier gezien de languitgestrekte opbouw slechts een zeer klein aantal stukjes tekst, inclusief plaatjes, opgenomen.

[4] Voordracht Weekend conferentie van de Wiskunde Werkgroep WVO, november 1959. Gepubliceerd in Euclides 35, pp. 177-186.
[5] P.M. van Hiele, D. van Hiele-Geldof: De vormende waarde der wiskunde. In Euclides 32 (1956/57), pp. 277-281.
[6] Ere-doctoraten in Zuid-Afrika en Nieuw-Zeeland vielen hem ten deel. In de VS is daarnaast veel onderzoek gedaan naar de 'Van Hiele levels of thinking'.

Over de auteur

Harrie Broekman (H.G.B.Broekman@phys.uu.nl) heeft gewerkt als leraar, lerarenopleider en vakdidacticus (Centrum voor Didactiek van de ß-wetenschappen, Universiteit Utrecht). Daarbij heeft hij zich altijd gesteund gevoeld door mensen als Van Hiele, doordat dezen hun leven lang bleven zoeken naar manieren om het leren van kinderen en volwassenen te ondersteunen.

DE WISKUNDEDOCENT ALS GOOCHELAAR



Getal in gedachten

[Job van de Groep]

Inleiding

Voor mijn workshop *Gegoochel met getallen* tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 1999 stelde ik destijds een boekje samen met goocheltrucs. In Euclides verscheen hieruit al het een en ander[1], en in dit nummer wil ik u opnieuw een truc presenteren.
Let wel: deze goocheltrucs worden exclusief aan wiskundedocenten ter hand gesteld onder de uitdrukkelijke voorwaarde van geheimhouding...
Simsalabim!

De truc: getal in gedachten

De goochelaar vraagt een toeschouwer een getal tussen 5 en 59 in gedachten te nemen. De goochelaar zal dat getal na slechts een paar aanwijzingen proberen te achterhalen. De toeschouwer moet daartoe antwoord geven op de volgende drie vragen:
- Hoeveel is de rest na deling door 3? (r_1)
- Hoeveel is de rest na deling door 4? (r_2)
- Hoeveel is de rest na deling door 5? (r_3)
De goochelaar vertelt daarna onmiddellijk welk getal de toeschouwer in gedachten had genomen.

Het geheim

Het getal zal de rest zijn van de volgende deling:

$$\frac{40r_1+45r_2+36r_3}{60}$$

Voorbeeld.
De toeschouwer kiest 43. De door de toeschouwer te noemen resten zijn dan 1 (r_1), 3 (r_2) en 3 (r_3). De goochelaar rekent nu snel uit:

$$\frac{40\cdot1+45\cdot3+36\cdot3}{60}=\frac{283}{60}=4 \text{ met rest } 43.$$

Transfer naar de les

Waarom werkt deze truc? Waarom vermenigvuldigingen van de resten met respectievelijk 40, 45 en 36? Een aardige opstap naar modulorekenen?

Noot

[1] Job van de Groep: De wiskundedocent als goochelaar. In: Euclides 80(4), januari 2005, en Euclides 80(7), mei 2005.

Over de auteur

Job van de Groep (e-mailadres: jvdgroep@wxs.nl) is, behalve wiskundedocent en schooldecaan vwo aan het Oosterlicht College te Nieuwegein, ook amateur-goochelaar.

COMBI-UREN WISKUNDE-NATUURKUNDE

Hoe kleinschalige veranderingen in de ogen van de leerlingen een nieuw vak kunnen opleveren

[Petra van Loon]



FIGUUR 1 Leerlingen tijdens een practicum

Samen Actief

Sinds het schooljaar 2003-2004 hanteert het Bisschoppelijk College Weert-Cranendonck het onderwijskundige concept ‘Samen Actief’. De uitgangspunten van deze onderwijsvisie zijn: meer samenwerking tussen verschillende vakken, meer variatie in werkvormen, stimuleren van zelfstandig leren en inspelen op verschillen tussen leerlingen.
In het kader hiervan is in het schooljaar 2003-2004 gestart met het geven van combi-uren wiskunde-natuurkunde, lesuren waarin stof uit de vakken wis- en natuurkunde aan bod komt, aan zowel het vijfde als het zesde leerjaar van de vwo-afdeling. De invoering van deze combi-uren moet leiden tot een betere afstemming tussen de vakken wis- en natuurkunde en tot het enthousiasmeren van leerlingen voor exacte vakken en studies.

Het concept nader toegelicht

De combi-uren wiskunde-natuurkunde worden in zowel het vijfde als het zesde leerjaar van het vwo gegeven aan leerlingen met het profiel Natuur en Techniek. De uren zijn mogelijk geworden doordat de vakken wiskunde-B1,2 en natuurkunde-1,2 wekelijks één lesuur hebben ‘ingeleverd’.[1] Voor wat betreft wiskunde betekent dit concreet dat ik in vwo-5 ongeveer 25 en in vwo-6 ongeveer 15 lesuren afsta. Hoe ik dit verlies aan lesuren goedmaak, beschrijf ik verderop.
In de twee lesuren die door deze constructie ontstaan, zijn zowel mijn collega natuurkunde (Willem Bouwman) als ik aanwezig. Het extra uur dat we op deze manier geven, wordt op dezelfde manier gefaciliteerd als een normaal lesuur, wat op onze school, inclusief voor- en nawerk, neerkomt op 51 klokuren.

Binnen de combi-uren wiskunde-natuurkunde wordt aandacht besteed aan raakvlakken en verschillen tussen de vakken wis- en natuurkunde. Het betreft aspecten waarmee de leerlingen al in het verleden te maken hebben gehad of waarmee ze in het vervolg van hun vwo-carrière nog te maken krijgen. In het huidige concept van de combi-uren worden dus geen onderwerpen buiten de curricula van beide vakken aangesneden, maar worden onderwerpen aangeboden die afgestemd zijn op twee vakken. Bij het behandelen van de onderwerpen wordt meestal gekozen voor een sturende werkwijze: nadat een stukje theorie aan bod is gekomen, moet het geleerde worden toegepast in opgaven.

Het vinden van geschikte onderwerpen lijkt niet moeilijk, de praktijk is echter anders: veel onderwerpen kunnen namelijk niet behandeld worden omdat de leerlingen nog niet over de vereiste voorkennis beschikken. Een simpele gedachte is dan: breng de leerlingen deze voorkennis bij, en het onderwerp kan tijdens de combi-uren wél aan bod komen. Dit bleek echter ook niet mogelijk vanwege de samenhang van de verschillende onderwerpen in het curriculum van zowel het vak wiskunde als het vak natuurkunde.
Zo zou het onderwerp *Lissajous-figuren* een geschikt onderwerp kunnen zijn voor de combi-uren. Lissajous-figuren kunnen immers verkregen worden door een bol, waarvan de massa goed is gekozen, te laten slingeren aan een veer. Vanuit de natuurkunde zou dit onderwerp behandeld kunnen worden als leerlingen vertrouwd zijn met de krachten en energie-omzettingen die een rol spelen bij periodieke bewegingen en als ze een oscilloscoop kunnen hanteren om de Lissajous-figuren vast te leggen. Deze zaken komen aan het begin van leerjaar 5 aan bod. Wil je gaan rekenen aan de verkregen Lissajous-figuren (bijvoorbeeld aan de baanlengte), dan is wiskundige kennis vereist over de parametervoorstelling en over het bepalen van de afgeleiden en primitieven van goniometrische functies. Dat zijn zaken die pas halverwege leerjaar 6 de revue zijn gepasseerd, tenminste op de manier waarop ik door de stof ga. In klas 6 zou dus pas na de kerstvakantie aandacht kunnen worden besteed aan het onderwerp Lissajous-figuren, een moment waarop we al een andere invulling voor de combi-uren hebben (het profielwerkstuk). Herschikking van onderwerpen binnen de wiskunde zou mogelijkheden kunnen bieden. Dit was mijns inziens niet verstandig: onderwerpen als differentiëren en primitiveren dienen, ter bevordering van de beheersing, langzaam uitgebouwd te worden.
Op soortgelijke problemen stuitten we als we onderwerpen als differentiaalvergelijkingen en radioactiviteit binnen de combi-uren aan bod wilden laten komen. Voor wat betreft het onderwerp periodieke verschijnselen zagen we, zoals verderop te lezen valt, wel mogelijkheden.

De rol die we als docenten binnen de combi-uren hebben verschilt niet van de rol die we normaliter als docent bij ons eigen vak hebben: je geeft instructies, helpt leerlingen bij het maken van opgaven en bespreekt klassikaal opgaven. Alleen dient er afgestemd te worden wie welk deel van het klassikale gedeelte voor zijn of haar rekening neemt. Deze afstemming vindt bij ons meestal ter plekke plaats, dus bij aanvang van de combi-uren: het wiskundige en het natuurkundige gehalte geeft meestal de doorslag wie bij zaken als het bespreken van een opgave het voortouw neemt. Het voorgaande houdt niet in dat de andere collega stilzwijgend toekijkt; regelmatig voorzien we elkanders uitleg nog van wiskundige of natuurkundige aanvullingen.

Programma vwo-5

Het probleem met betrekking tot het vinden van geschikte onderwerpen speelde vooral in de eerste periode van vwo-5. (Een schooljaar bestaat in totaal uit vier periodes.) Dit heeft ons doen besluiten om in deze periode voornamelijk aandacht te besteden aan algemene (reken)vaardigheden die om de hoek komen kijken bij het oplossen van wis- en/of natuurkundige

vraagstukken. In het kader hiervan worden de volgende onderwerpen behandeld:
- afronden bij de vakken wis- en natuurkunde;
- rechtbuigen van grafieken;
- enkel- en dubbellogaritmisch papier;
- evenredigheden;
- algebraïsche vaardigheden;
- SI-eenheden;
- probleemaanpak.

Als lesmateriaal wordt hierbij een hoofdstuk uit het natuurkundeboek gebruikt, een hoofdstuk dat normaal gesproken niet wordt behandeld (zie [2]). Daarnaast wordt sinds dit schooljaar ook gebruik gemaakt van eigen lesmateriaal waarin zaken als het herschrijven van formules aan bod komt (zie figuur 2).

In de tweede periode komt het onderwerp periodieke verschijnselen aan bod. In het schooljaar 2003-2004 zijn we vrij dicht bij een hoofdstuk uit het natuurkundeboek gebleven en werd er van hieruit verwezen naar de wiskunde. Daarnaast werd er buiten de combi-uren om in de lessen wiskunde ook nog aandacht besteed aan dit onderwerp. Achteraf gezien lagen er met betrekking tot dit onderwerp méér mogelijkheden tot 'samensmelting' van de wis- en natuurkunde. Om deze samensmelting te bewerkstelligen is in het schooljaar 2004-2005 het wiskundige aspect ook behandeld binnen de combi-uren. Er werd eerst gestart in het wiskundeboek en vervolgens verder gegaan in het natuurkundeboek.

De derde periode staat in het teken van de praktische opdracht, waarvan het cijfer zowel voor wiskunde als voor natuurkunde meetelt. Normaal gesproken moet er voor beide vakken een praktische opdracht gemaakt worden. De praktische opdracht moet in de nieuwe vorm stof uit beide vakken bevatten. Voorbeelden van onderwerpen zijn de regenboog, de kruisboog en het ontwerpen van een digitale windsnelheidsmeter.

In lesverband hebben de leerlingen vijf combi-uren, dus 10 lesuren, de tijd om aan de praktische opdracht te werken. De derde periode wordt afgesloten met presentaties van leerlingen over hun praktische opdracht: elk groepje toont zijn opstelling aan de rest van de klas en doet verslag van zijn bevindingen (zie figuur 3).

De samenwerking wat betreft de praktische opdracht wordt door alle betrokken partijen als een succes gezien. Zo konden de leerlingen intensiever begeleid worden en tevens kostte deze manier van samenwerken de leerlingen minder tijd: ze hoefden nu immers één praktische opdracht minder te maken.

Na een jaar ervaringen te hebben opgedaan in het schooljaar 2003-2004, is een logisch gevolg dat het programma op een aantal punten wordt bijgesteld. Een aantal bijstellingen werd hiervoor reeds beschreven. Een andere bijstelling is dat de combi-

FIGUUR 2 Een opgave uit zelf vervaardigd lesmateriaal

FIGUUR 3 Leerlingen tonen hun praktische opdracht aan de klas

Herschrijven van formules

a) De inhoud van een bol met straal r kan berekend worden met de formule $I_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Druk de inhoud van de bol nu uit in de diameter d van de bol.

b) Gegeven zijn de formules:
$$F_c = \frac{mv^2}{r} \text{ en } v = \frac{2\pi r}{T}$$
Voeg beide formules samen zodat F_c wordt uitgedrukt in m, r en T.

c) Gegeven zijn de formules:
$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \text{ en } A = \pi r^2.$$
Voeg beide formules samen zodat r wordt uitgedrukt in ρ, l en R.



Een onderzoek in de ruimte

Astronauten doen tijdens hun verblijf in de ruimte ook allerlei onderzoeken. Op een planeet doet men een onderzoek met een bol van 300 gram. De bol hangt aan een touw van 40 cm en zwaait met een periode van 2,05 seconden.

a) Toon door middel van berekeningen aan op welke planeten dit onderzoek zou hebben kunnen plaatsvinden. Maak hierbij gebruik van tabel 31 uit Binas.

De maximale uitwijkingshoek van de slingering is 12°.

b) Bereken de amplitude van de slingering.

Tijdens het onderzoek gaat men bekijken hoe de periode verandert als gevolg van één van de volgende drie veranderingen:
1. de bol van 300 gram wordt vervangen door een bol van 75 gram;
2. er wordt een touw van 160 cm in plaats van 40 cm gebruikt;
3. de maximale uitwijkingshoek wordt 6° in plaats van 12°.

c) Geef aan wat voor effect elk van de bovenstaande veranderingen op de periode heeft. Licht jouw antwoord ook toe.

FIGUUR 4 Een opgave uit de toets op het einde van periode 2

uren niet meer gedurende het gehele schooljaar gegeven worden: bij het vak natuurkunde was een achterstand op het programma ontstaan. De combi-uren worden nu afgesloten in de derde periode met de praktische opdracht, wat naar onze mening een mooie afsluiting is.
Bij het vak wiskunde was overigens geen achterstand ontstaan: het vak wiskunde levert relatief gezien immers ook minder uren in dan het vak natuurkunde. Om te voorkomen dat ik wat betreft het doorwerken van het programma in tijdnood zou komen, heb ik ervoor gekozen om de combi-uren wiskunde-natuurkunde als invulling voor het domein 'keuzeonderwerp' te gebruiken. Daarnaast heb ik nog een slag om de arm gehouden door het onderwerp 'continue dynamische modellen', dat alleen maar op schoolexamenniveau getoetst dient te worden, als laatste te behandelen. Bij eventuele tijdnood zou bij dit onderwerp minder uitgebreid stilgestaan kunnen worden. De praktijk wijst echter uit dat er ook nog voldoende tijd is om dát onderwerp uitgebreid aan bod te laten komen.

Nieuw in het schooljaar 2004-2005 zijn de toetsen die in klas 5 aan het einde van de eerste en de tweede periode worden afgenomen. Door het geven van toetsen, waarvan het cijfer voor beide vakken meetelt, proberen we het belang te benadrukken van de beheersing van de onderwerpen die aan bod komen in de combi-uren. Dit belang werd vorig jaar in mindere mate door de leerlingen ingezien; ze redeneerden toen als volgt: 'De stof van de combi-uren wordt niet getoetst en is dus niet belangrijk.'
In figuur 4 staat een opgave uit de toets die na de tweede periode werd afgenomen.
Wat betreft de resultaten van de toetsen viel op dat voor de eerste toets, waarin algemene vaardigheden getoetst werden, minder goede resultaten behaald werden dan voor de tweede toets, over periodieke verschijnselen. Op zich niet verwonderlijk: de eerste toets ging over een grotere hoeveelheid stof, die als meer inzichtelijk bestempeld kan worden, en in de tweede toets werd stof getoetst met meer samenhang, en daardoor beter te overzien door de leerlingen.
Over de resultaten van de toetsen kan verder vermeld worden dat deze ongeveer overeenkomen met de cijfers die de leerlingen voor beide vakken afzonderlijk behalen.
We hebben inmiddels al gemerkt dat de invoering van toetsen zijn vruchten afwerpt: de leerlingen zijn nu een serieuzere houding gaan aannemen ten opzichte van de combi-uren. Ze hebben aan de combi-uren wiskunde-natuurkunde zelfs de status 'vak' toegekend. Een status die niet alleen verworven is door het afnemen van toetsen, maar ook door zaken als het verstrekken van studiewijzers en het ontwikkelen van eigen lesmateriaal.

Programma vwo-6

De combi-uren in klas 6 van het vwo werden in het schooljaar 2003-2004 gegeven door Thei Montforts, een collega wiskunde die onlangs met pensioen is gegaan, en Willem Bouwman. Vanaf dit schooljaar ben ik als docent wiskunde bij deze combi-uren betrokken.
De eerste weken van dit schooljaar stonden in het teken van het maken van opgaven met natuurkundige contexten waarbij veelvuldig beroep gedaan werd op wiskundige vaardigheden. Zo moesten de leerlingen opgaven maken waarbij gedifferentieerd of geprimitiveerd moest worden. Vervolgens stond het profielwerkstuk op het programma. De leerlingen kregen ongeveer 25 lesuren de tijd om hieraan binnen de combi-uren te werken; voor de rest moest eigen tijd geïnvesteerd worden.
Vóór de invoering van de combi-uren moesten leerlingen met het profiel Natuur en Techniek een profielwerkstuk maken bij wiskunde óf natuurkunde en werden ze hierbij begeleid door de docent wiskunde óf de docent natuurkunde; de leerlingen werden dan 'verdeeld' over beide docenten. Het profielwerkstuk moet in de nieuwe vorm, evenals de praktische opdracht, zowel voldoende wiskunde als voldoende natuurkunde bevatten. In het kader van het profielwerkstuk hebben de leerlingen zich verdiept in onderwerpen als de klapschaats, de boemerang en het bepalen van de sterkte van een brug (zie figuur 5).

In het schooljaar 2003-2004 werden in vwo-6 gedurende het gehele schooljaar combi-uren gegeven. Dit schooljaar worden er vanaf de derde periode geen combi-uren meer gegeven en wordt de vrijgekomen tijd gebruikt voor de reguliere lessen van wis- en natuurkunde. Met het oog op het aankomende eindexamen leek ons dit een betere keuze.

Technische Universiteit Eindhoven

Door de combi-uren oefenen de leerlingen veelvuldig met het koppelen van kennis die ze hebben opgedaan bij de vakken wis- en natuurkunde. Een vaardigheid die in mindere mate bij beide vakken afzonderlijk aan bod komt, maar waarop wel veelvuldig beroep wordt gedaan bij een (exacte) vervolgstudie. Het koppelen van de vakken wis- en natuurkunde, en dus ook de afstemming tussen de vakken onderling, willen we meer gestalte geven door te gaan samenwerken met de Technische Universiteit Eindhoven (TUE). Tevens willen we bij de leerlingen interesse opwekken voor een exacte vervolgstudie. In het schooljaar 2005-2006 gaan we daarom met de TUE samenwerken op het gebied van het profielwerkstuk. Het zal een vorm zijn waarbij de leerlingen een aantal dagen practica uitvoeren op de TUE. Vanuit de TUE zijn bij dit initiatief de wiskundige Hans Sterk en de natuurkundige Stefan van Delft betrokken.

Op het samenwerkingsverband met de TUE werd dit schooljaar al een voorschotje genomen: voor vwo-5 gaf Hans Sterk een hoorcollege met als thema 'Rondom wiskunde' (zie figuur 6). Het hoorcollege

vormde een inleiding op de praktische opdracht en gaf de leerlingen tevens inzicht in de manier waarop wiskunde wordt ingezet bij het doen van onderzoek.

Een grotere vlam binnen de school

Door invoering van de combi-uren zal er in de toekomst meer samengewerkt worden tussen de vakken wis- en natuurkunde; een logisch gevolg, want zowel de leerlingen als de docenten zijn enthousiast over het huidige concept van de combi-uren. Vanaf volgend schooljaar maken vwo-5-leerlingen met het profiel N&G ook een gezamenlijke praktische opdracht en in havo-5 maken leerlingen met het profiel N&T een profielwerkstuk dat zowel wiskunde als natuurkunde bevat. Normaal gesproken moest deze laatste groep leerlingen een profielwerkstuk maken over een wiskundig òf een natuurkundig onderwerp.

Het nieuwe geïntegreerde bètavak

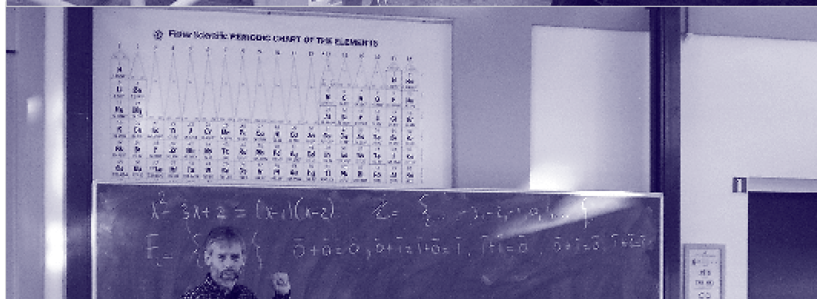
Het is ook op zijn plaats om de combi-uren in verband te brengen met nieuwe ontwikkelingen met betrekking tot de herziening van de tweede fase in 2007. Zal het nieuw in te voeren bètavak een vak zijn als de combi-uren? Er moet dan in ieder geval op gelet worden, dat de stof van de vakken onderling en het moment waarop deze stof wordt behandeld goed op elkaar afgestemd worden. Wordt hiermee [redacted]

Tot slot

De combi-uren wiskunde-natuurkunde kunnen gezien worden als een initiatief waarbij door kleinschalige veranderingen een nieuw stukje onderwijs, een nieuw vak in de ogen van de leerlingen, is ontstaan. Het is onderwijs dat gemakkelijk geïmplementeerd kan worden op andere scholen. Ofwel: combi-uren wiskunde-natuurkunde, welke school volgt?

FIGUUR 5 De sterkte van een brug bepaald







FIGUUR 6 Een hoorcollege voor vwo-5, verzorgd door de TUE

Noten

[1] De vakken wiskunde-B1,2 en natuurkunde-1,2 kunnen alleen gevolgd worden door leerlingen met het profiel Natuur en Techniek. Leerlingen van vwo-5 volgen per week vijf lesuren wiskunde-B1,2 en vier lesuren natuurkunde-1,2. In vwo-6 zijn dat zes lesuren voor wiskunde-B1,2 en vijf lesuren voor natuurkunde-1,2. In de perioden dat de combi-uren gegeven worden, is voor beide vakken wekelijks één uur minder gereserveerd.

[2] H. Biezeveld, L. Mathot: Scoop (vwo bovenbouw, Natuurkunde 1, deel 1). Groningen: Wolters-Noordhoff (1999).

Over de auteur

Petra van Loon (e-mailadres: pjg.vanloon@college.nl) is sinds het schooljaar 2002-2003, na het afronden van de lerarenopleiding, als docente wiskunde verbonden aan het Bisschoppelijk College Weert-Cranendonck te Weert.

HET VERHAAL VOOR FLOOR

Over een manier om de begrippen 'oppervlakte onder een kromme' en 'primitiveren' te introduceren, en over het zoeken naar een oppervlakteformule zonder te primitiveren.

[Kees Alkemade]

Een vraag van Floor

Het is donderdag het 6e uur bij 5-vwo wiskunde-B1. We zijn al enige tijd bezig in het hoofdstuk 'Oppervlakte en integreren'. Floor (kleine, want er is ook een grote), steekt haar vinger op: *'Meneer, wat zijn we nu eigenlijk aan het doen?'*
Na het gewone werk afgehandeld te hebben begin ik het volgende verhaal.

Floor, je hebt een krantenwijk. Iedere week verdien je 11 euro. In een maand van vier weken verdien je 4 × 11 = 44 euro; dit bedrag geven we aan met M, je maandverdiensten in euro's. Je kunt dit ook met een plaatje laten zien; zie figuur 1:
$M = 11\cdot1 + 11\cdot1 + 11\cdot1 + 11\cdot1 = 44$
Dit is de totale oppervlakte van de vier rechthoekjes van ieder 1 breed en 11 hoog.
Nu is het verder bekend dat het in de maand januari steeds kouder wordt. Je krantenbaas Arne spreekt het volgende met je af: in week 1 verdien je 11 euro, 13 euro in week 2, 15 in week 3 en 17 in week 4. In deze maand is dus (zie figuur 2)
$M = 11\cdot1 + 13\cdot1 + 15\cdot1 + 17\cdot1 = 56$
Is dit ook de totale oppervlakte van de vier rechthoekjes?

Nu ga jij, Floor, aan je baas Arne een verbetering voorstellen ten opzichte van de vorige afspraak. Je zegt: Omdat het iedere dag kouder wordt, wil ik iedere dag meer krijgen. En wel volgens het functievoorschrift $l(t) = 11 + 2t$, waarbij l het loon is in euro's en t de tijd in weken.
We gaan nu jouw totale loon V over de *eerste week* uitrekenen (zie figuur 3):

$$V = 11\cdot\tfrac{1}{7} + (11+\tfrac{2}{7})\cdot\tfrac{1}{7} + (11+\tfrac{4}{7})\cdot\tfrac{1}{7} + (11+\tfrac{6}{7})\cdot\tfrac{1}{7} + (11+\tfrac{8}{7})\cdot\tfrac{1}{7} + (11+\tfrac{10}{7})\cdot\tfrac{1}{7} + (11+\tfrac{12}{7})\cdot\tfrac{1}{7} = 11{,}86$$

Is dit ook weer de totale oppervlakte van de zeven rechthoekjes?
Het is duidelijk dat je op deze manier méér krijgt, ook als je het voor de gehele maand zou bekijken.

Ik vertel de klas dat de optelling van de oppervlakten van rechthoeken die je bij de grafiek van een functie kunt tekenen, een Riemann-som heet.

Je baas Arne heeft er lol in gekregen en stelt nu het volgende voor:
O is de oppervlakte van vierhoek $OABC$ (zie figuur 4).
Je mag O uitrekenen en dat getal krijg je als loon over de maand januari:
$O_{0-4} = O_{\text{rechthoek } OAKC} + O_{\text{driehoek } CKB} = 11\cdot4 + \tfrac{1}{2}\cdot4\cdot8 = 60$
Hier schrikt Arne toch wel van. Jij zegt: 'Dit is het meest eerlijk, want zo werkt de geleidelijke verhoging als gevolg van het alsmaar kouder worden het best.'
Wat vindt de rest van de klas ervan?

Vermoeden

Het vermoeden van een formule:

$$O_{0-2} = 11\cdot2 + \tfrac{1}{2}\cdot2\cdot4 = 11\cdot2 + 2\cdot2$$

$$O_{0-3} = 11\cdot3 + \tfrac{1}{2}\cdot3\cdot6 = 11\cdot3 + 3\cdot3$$

$$O_{0-t} = 11\cdot t + t^2$$

Klopt dit? Probeer het zelf bij O_{0-4}.

Gegeven: zie figuur 5.
Te bewijzen: $O_{0-t} = 11t + t^2$
Bewijs:

$$O_{0-t} = O_{\text{vierhoek } OMTC} = O_{\text{rechthoek } OMNC} + O_{\text{driehoek } CNT} =$$

$$11 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot 2t = 11t + t^2$$

Floor, we gaan nu terug naar jouw vraag: 'Wat zijn we eigenlijk aan het doen?'
Antwoord: 'We maken een soort optelling van iets dat voortdurend verandert.'
Floor knikt instemmend.

Tweede les

Vraagstelling: Hoe kun je dit aanpakken als krantenbaas Arne je wil uitbetalen volgens $l(t) = \sqrt{t}$?
Of volgens $l(t) = t^2$?

Het volgende heb ik niet in de klas verteld.
Ik vroeg me mezelf af of je met het begrip evenredigheid meer functies kunt behandelen dan alleen lineaire. Vervolgens vond ik een verrassend verband tussen de coëfficiënten van primitieven van bijvoorbeeld $y = \sqrt{x}$ *en* $y = x^2$.
Wel heb ik de naam anti-afgeleide geïntroduceerd vóór het begrip primitieve. Dit volgens het didactische principe dat je de naam van of een symbool voor een nieuw begrip pas mag introduceren als de inhoud van het begrip duidelijk is.

De vorige les hebben we een formule afgeleid voor de oppervlakte onder een rechte lijn met gegeven functievoorschrift.
In figuur 6 zijn met het domein = [0,1] de grafieken van enkele functies getekend.
Allereerst kijken we naar de functies $y = 1$ en $y = t$.

We *weten* nu:

	$y = l(t)$	$O(t)$	$O(t)$ evenredig met	dus $O(t) =$	met $c =$
rechthoek *OKPC*	1	$1 \cdot t$	$1 \cdot t$	$c \cdot 1 \cdot t$	1
driehoek *OKM*	t	$\frac{1}{2} \cdot t \cdot t$	$t \cdot t$	$c \cdot t \cdot t$	$\frac{1}{2}$

Vervolgens bekijken we de functies $y = t^2$ en $y = \sqrt{t}$.
We *vermoeden* nu:

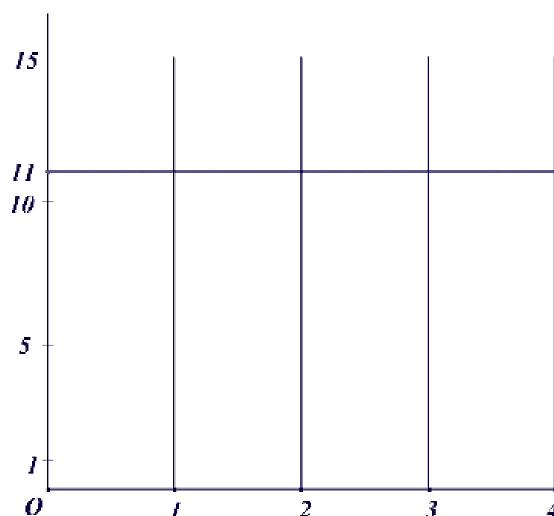
	$y = l(t)$	$O(t)$	$O(t)$ evenredig met	dus $O(t) =$	met $c =$
figuur *OKL*	t^2	…	$t^2 \cdot t$	$c_1 \cdot t^3$	$\frac{1}{3}$
figuur *OKN*	$\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$	…	$t^{\frac{1}{2}} \cdot t$	$c_2 \cdot t^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{3}$

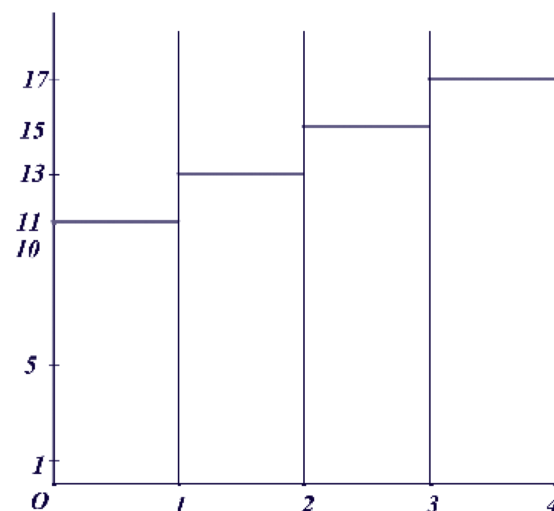
Omdat in figuur 6 de figuren *OABLO* en *OCBNO* congruent zijn (vanwege symmetrie in de lijn $y = t$) moet gelden:

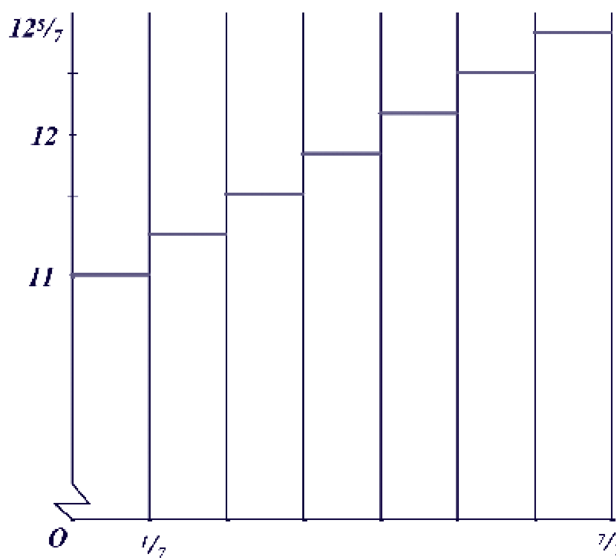
$$O_{OABLO} + O_{OABNO} = O_{OABC} = 1$$

Dus $c_1 \cdot 1^3 + c_2 \cdot 1^{\frac{3}{2}} = 1$, oftewel er moet gelden $c_1 + c_2 = 1$.

FIGUUR 1
FIGUUR 2



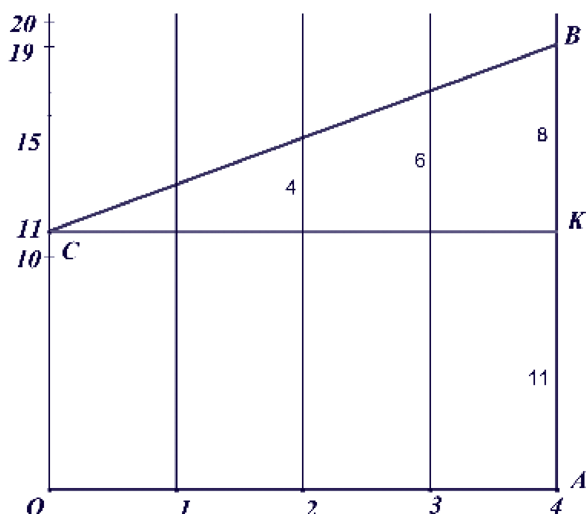


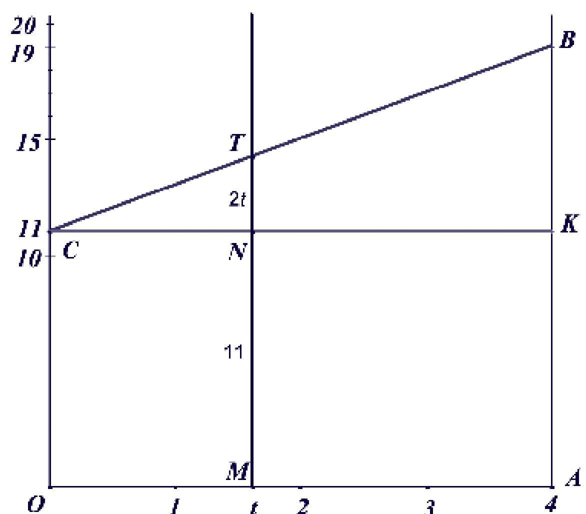


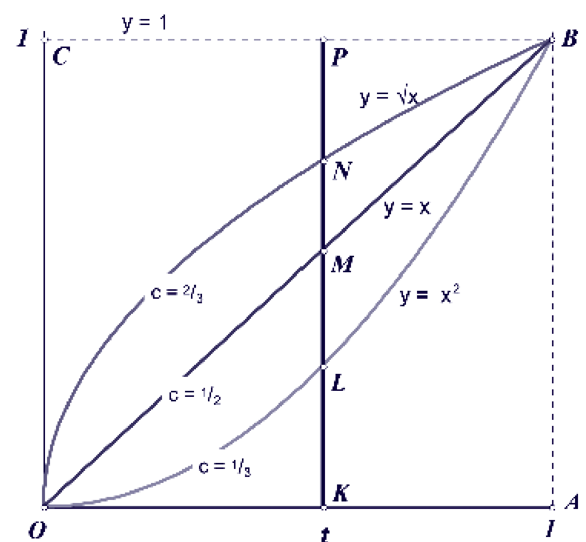
FIGUUR 3

FIGUUR 4

FIGUUR 5







FIGUUR 6

Het is duidelijk dat onze vermoedelijke waarden voor c_1 en c_2 hieraan voldoen.

In de zeventiende eeuw hebben Newton en Leibniz dit vermoeden onafhankelijk van elkaar bewezen. Zij bewezen de veel algemenere stelling:
De oppervlakte onder de grafiek van een functie wordt gegeven door een anti-afgeleide van die functie.

Vraag: Geldt deze regel ook voor onze functies?
Antwoord: Ja, zie het lijstje hieronder.

functie	anti-afgeleide
11	$11t$
1	$1\cdot t$
$2t$	t^2
t	$\frac{1}{2}t^2$
t^2	$\frac{1}{3}t^3$
$\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$

Afspraak: Voortaan noemen we een anti-afgeleide een primitieve, en het vinden ervan primitiveren.

We gaan terug naar onze oorspronkelijk vraag:
Wat zijn we eigenlijk aan het doen?
Antwoord: We maken een soort optelling van iets dat voortdurend verandert, van een functie.
Newton en Leibniz hebben ons een algemene methode gegeven om hiermee te rekenen, namelijk via invullen bij een primitieve van die functie.

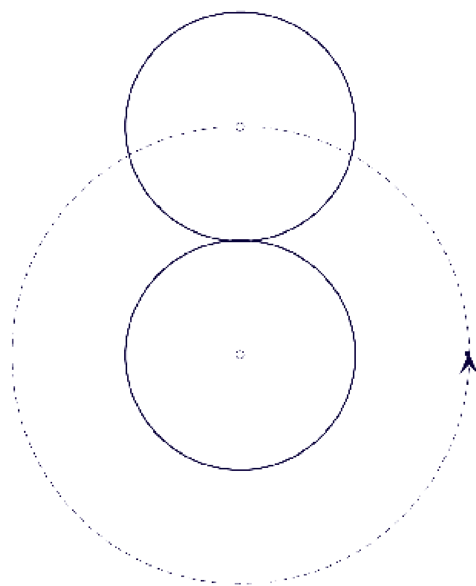
Over de auteur

Kees Alkemade (e-mailadres: keesalkemade@planet.nl) is sinds 1973 wiskundeleraar aan de vestiging Het Nieuwe Eemland van het Meridiaan College te Amersfoort.

DRIE KOMMA VEERTIENVIJFTIEN TWEEENNEGENTIG

[Victor Thomasse]

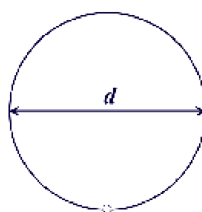
FIGUUR 1



‘Drie komma veertien vijftien tweeënnegentig… weet u uit uw hoofd wat er dan komt, meneer?’ Jeroen en Bas kijken me aan terwijl ze een blaadje vasthouden. ‘Wat is dat?’, vraag ik. ‘Dat zijn alle getallen van *pi*’, is het antwoord. ‘Echt allemaal?’ vraag ik geamuseerd. Jeroen onderzoekt mijn grijns en kijkt naar zijn blaadje. ‘Zijn er dan nóg meer?’, zie ik hem denken. Ik stap naar voren en kijk mee. Het is een artikel in het Engels dat ze van internet hebben gehaald en er staan hooguit de eerste honderd decimalen op. ‘Ja’, zeg ik, ‘kijk maar: het eindigt met drie puntjes, want het gaat oneindig lang door.’ Jeroen kijkt nu weer naar mij. ‘Dus u kent ze niet allemaal, dan?’ Intussen hebben we de aandacht van andere leerlingen. ‘Hij weet het niet!’, roept Charlotte zonder zelf te weten waar het over gaat. En terwijl ik haar zeg niet door de klas te roepen, ontstaat er een rumoer dat dit keer vreemd genoeg wel over wiskunde gaat. ‘Het is tweeëntwintig zevende’, weet iemand zeker. En die weet dat heel zeker, want hij heeft het van zijn vader.

Dan maar proberen dit om te buigen naar iets nuttigs. ‘Wie weet wat *pi* is?’ Weinig vingers en veel geroep. Het antwoord ‘hoeveel stralen er in een cirkel gaan’ komt nog het dichtst in de buurt. Misschien niet waar je in vier havo op hoopt, maar genoeg om met een krijtje voor het bord te gaan staan en het nog eens samen te vatten: ik teken een cirkel en schrijf de formule ‘omtrek is *pi* maal de diameter’ op. En goh… ondanks, of misschien juist dankzij Charlotte heb ik de aandacht. Intussen denk ik aan iets dat Hofstadter, de auteur van *Gödel, Escher, Bach,* schreef. Hoe hij op een terras samen met zijn vrienden *pi* reciteerde en wat voor een esoterische sfeer dat gaf. Die decimalen had hij geleerd toen hij nog ‘young and a stupid boy’ was. Stomme jonge mensen komen ook aan het woord in het boek *Microserfs* van Coupland, waarin wordt beschreven hoe een stel nerds samen uit Microsoft stapt om een eigen bedrijf op te zetten. En jawel hoor, tijdens het programmeren worden ook daar veel te veel getallen achter de komma gezamenlijk opgezegd. Als een beschermende mantra tegen de boze buitenwereld.

Eens kijken hoe ver ik kom. ‘Ik weet niet precies hoeveel *pi* is, maar het is ongeveer drie komma



$\pi \cdot d$



FIGUUR 2

veertien vijftien tweeënnegentig vijfenzestig vijfendertig'. En terwijl ik het in de vertrouwde cadans opnoem en op het bord schrijf, word ik bijgestaan door Jeroen en Bas die vanaf het blaadje netjes mee reciteren. Tot de klas zelf hen tot stilte maant om er achter te komen hoeveel ik er zonder hulp uit mijn hoofd kan opzeggen. Langzaam verschijnt *3,14159265358979323846264338327950 2* voor hun meewarige ogen, want ook ik ben eens een stomme jongen geweest. Als ik me behalve een supernerd ook nog een freak begin te voelen, hou ik op. 'Zo is het genoeg', zeg ik, 'want belangrijker is wat we met *pi* kunnen doen.' Boven op de rand van de cirkel teken ik er nóg een en om het middelpunt ook nog een gestippelde versie met een twee maal zo grote diameter (zie figuur 1).
'Ik weet een raadsel; luister goed. Stel ik heb een muntje, bijvoorbeeld een euro.' Ik wijs naar de onderste niet-gestippelde cirkel. 'En die euro druk ik stevig tegen dit bord aan. En stel ik neem een andere euro die ik er precies één keer helemaal om heen laat rollen.' Mijn hand volgt nu de stippellijn. 'Hoe vaak draait dat muntje dan om?' Weer een reden voor Charlotte om door de klas te roepen: 'Ja, één keer natuurlijk.' En echt alle leerlingen vinden dat ook. Logisch toch? Sommige leerlingen halen zelfs echte euro's tevoorschijn gehaald om het te bewijzen. Maar door de gladde rand blijven de resultaten onduidelijk.

In het rumoer heb ik intussen een wiel met diameter *d* op het bord getekend (zie figuur 2). Als het weer stil is, laat ik zien dat het midden van zo'n wiel een afstand van *pi* maal *d* aflegt voordat hij één keer rond is. Nou, dat zijn ze gelukkig allemaal met me eens. 'Dus om *pi* maal *d* ver te komen moet je één keer ronddraaien... OK?' De volgende stap is lastiger. Ik wijs naar de eerste tekening. 'Dat stippellijntje is steeds het midden van de euro die ronddraait. Wat is de diameter van die cirkel? En hoe lang is die stippellijn dan?' Langzaam werk ik toe naar de conclusie: 'Dus één keer omdraaien is *pi* maal *d*. En dat stippellijntje is *pi* maal twee keer *d*. Dus draait de euro niet één, maar twee keer om! Logisch toch?'

De 'stupid boy' van toen is volwassen geworden. Helaas: iedere leeftijd heeft zijn eigen stommiteit. Zo denk ik telkens weer dat je mensen (en dus ook leerlingen) kunt overtuigen op basis van pure logica alleen. Maar pas de les daarna, als ik alles nog eens dunnetjes over doe, beginnen ze het te geloven en verstomt zelfs het verzet van Charlotte. Ook in de wiskundeles ben je bezig met gevoelens.
En vaak moet je twee keer om... voordat je helemaal om bent.

Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds ruim een jaar werkt hij weer in het onderwijs; hij heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

Kolonel Blotto

[Rob Bosch]

Stelt u zich eens voor dat u als kapitein de beschikking heeft over twee pelotons waarmee u een vijandelijk doel moet uitschakelen. Dit doel kan slechts worden aangevallen via drie toegangswegen. U hebt de keus de twee pelotons te verdelen over twee van de drie wegen of met twee pelotons op te trekken via één toegangsweg. Wat doet u als commandant? Uiteraard verzamelt u eerst informatie over de vijand. Deze blijkt, zo melden uw verspieders, over drie pelotons te beschikken. De tegenstander kan dus zijn pelotons ter verdediging verdelen over een, twee of drie wegen. Om succesvol te kunnen doorbreken heeft de aanvaller een overwicht nodig van tenminste één peloton. Wat is de beste (optimale) strategie voor de aanvaller en hoe kan de verdediging optimaal gevoerd worden?

De aanvaller kan kiezen uit twee strategieën: de strategie S_1 waarbij de pelotons gescheiden optrekken en de strategie S_2 waarbij de beide pelotons over eenzelfde weg optrekken. Aangezien de commandant geen informatie heeft over de opstelling van de verdediger, is de keuze van de wegen waarlangs hij zijn troepen laat optrekken irrelevant voor de te kiezen strategie. De verdediger kan zijn pelotons zoals gezegd verdelen over één, twee of drie wegen, dat wil zeggen hij heeft drie strategieën: strategie T_1 waarbij iedere weg verdedigd wordt door één peloton, strategie T_2 waarbij twee pelotons een weg verdedigen en het andere peloton wordt ingezet op een van de overblijvende wegen en tenslotte de strategie T_3 waarbij de drie beschikbare pelotons worden ingezet om één van de toegangswegen te verdedigen. Ook hier geldt dat bij gebrek aan informatie de keuze van de wegen irrelevant is voor de strategie.

Merk op dat het in dit spel alles of niets is. Of het doel wordt bereikt, of de aanval wordt afgeslagen. We waarderen een succesvolle aanval (winst) met een 1 voor de aanvaller en een mislukte aanval (verlies) met een 0. In dit spel betekent een winst voor de aanvaller verlies voor de verdediger en een verlies van de aanvaller is een winst voor de verdediger. Een dergelijk spel noemen we een *zero-sum game*.
Om de uitkomsten bij gekozen strategieën te kunnen beoordelen maken we een matrix, de opbrengstmatrix, waarbij we de strategieën van de aanvaller verticaal en de strategieën van de verdediger horizontaal opschrijven:

	T_1	T_2	T_3
S_1			
S_2			

We gaan gemakkelijk na dat bij de combinaties (S_1,T_3) en (S_2,T_1) het doel door de aanvaller bereikt wordt. Bij de combinatie (S_1,T_1) wordt de aanval zeker afgeslagen. We kunnen dus drie vakken van de matrix invullen.

	T_1	T_2	T_3
S_1	0		1
S_2	1		

In de matrix is de opbrengst voor de aanvaller ingevuld. Daar, zoals gezegd, een winst voor de aanvaller verlies voor de verdediger betekent en andersom, is het resultaat voor de verdediger ook direct af te lezen.

Voor het invullen van de andere vakken is wat eenvoudige kansrekening nodig. Bijvoorbeeld, in het geval van de combinatie (S_2,T_3) is de kans $\frac{2}{3}$ dat het doel wordt bereikt. Immers, de aanvaller kiest willekeurig één van de drie wegen en slechts één weg wordt verdedigd. Voor de combinatie (S_1,T_2) geldt voor de aanvaller ook een kans van $\frac{2}{3}$ op succes. In dit geval is er weer één weg onbeschermd. De kans dat de aanvaller het eerste peloton op deze weg plaatst, is $\frac{1}{3}$. Voor het tweede peloton geldt dat ook, zodat de totale kans gelijk is aan $\frac{2}{3}$. De kans op succes in het geval (S_2,T_2) kan op dezelfde wijze worden bepaald.

De complete opbrengstmatrix ziet er nu als volgt uit:

	T_1	T_2	T_3
S_1	0	$\frac{2}{3}$	1
S_2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

In de opbrengstmatrix zijn nu de kansen op succes voor de aanvaller opgenomen. Deze zal dus een strategie kiezen waarbij de kans op succes zo groot mogelijk is terwijl de verdediger uiteraard een strategie kiest waarbij deze kans zo klein mogelijk is.

Het eerste dat opvalt in de matrix is dat de strategie T_2 voor de verdediger voordeliger is dan de strategie T_3. Bij de strategie S_2 leveren de strategieën T_2 en T_3 hetzelfde resultaat op. Als de aanvaller S_1 kiest dan is T_2 een betere keus dan T_3. De verdediger zal dus nooit T_3 kiezen. We zeggen dat de strategie T_3 *gedomineerd* wordt door T_2. Overigens hadden we ook zonder de opbrengstmatrix tot deze constatering kunnen komen. De verdediger kan met twee pelotons een toegangsweg afdoende verdedigen. Een derde peloton op dezelfde weg heeft geen enkele zin en derhalve kan dit peloton beter elders ingezet worden. Aangezien de verdediger nooit T_3 kiest, kunnen we deze uit de matrix verwijderen. De overblijvende matrix wordt zo:

	T_1	T_2
S_1	0	$\frac{2}{3}$
S_2	1	$\frac{2}{3}$

We zien nu dat de aanvaller een dominante strategie heeft. Immers, strategie S_2 levert tegen iedere verdediging minstens zoveel op als S_1. In het geval de verdediger T_1 kiest geeft S_2 zelfs een beter resultaat dan S_1. De aanvaller moet dus strategie S_2 kiezen. Nu is het voor de verdediger niet moeilijk meer. Tegen S_2 is T_2 zijn beste keus. Kortom, de optimale strategie voor de aanvaller is S_2 en de optimale strategie voor de verdediger is T_2. De aanvaller rukt dus op met twee pelotons terwijl de verdediger zijn troepen over twee wegen verspreidt. In dit geval heeft de aanvaller een kans van $\frac{2}{3}$ om het doel te bereiken.

Het strategiepaar (S_2,T_2) is een *evenwicht*; dat wil zeggen dat geen van de spelers beter af is als hij eenzijdig van de gekozen strategie afwijkt. Een dergelijk evenwicht heet een *Nash-evenwicht*, genoemd naar John Nash over wiens leven enige tijd geleden de film ‘A beautiful Mind’ is gemaakt.

We merken nog op dat de aanvaller, als hij eenmaal strategie S_2 heeft gekozen, daarover niet geheimzinnig hoeft te doen. De verdediger kan geen gebruik maken van deze wetenschap. Hij moet toch T_2 kiezen voor het beste resultaat.

In de jaren vijftig waren dit soort probleempjes erg populair. Ze stonden bekend als *Colonel Blotto games*, vandaar de titel.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

ER GAAT NIETS BOVEN MATH ENRICHMENT COURSES

Wiskunde Scholen Prijs 2004; International School en TweeTalig Onderwijs van het Maartens College te Groningen

[Heleen Verhage]

Kortste route naar Groningen

Voor de prijsuitreiking van de Wiskunde Scholen Prijs kom je nog eens ergens. In 2004 liep de geografische spreiding van de inzendingen van Overveen tot Oldenzaal en van Breda tot Groningen. Stel het was de bedoeling geweest om alle elf scholen die iets hadden ingezonden op één dag te bezoeken, dan had dat zeker een leuk kortste route probleem opgeleverd. De onderbouwleerlingen van de International School en van het TweeTalig Onderwijs (TTO) van het Maartens College in Groningen zouden dit probleem dan mooi voor mij kunnen oplossen. Want zij doen in het kader van de door docent Heleen Tims opgezette *SGS Math Enrichment Courses* een groot aantal wiskundeprojecten, waaronder ook een cursus over 'Networks'. In het lesplan van deze serie van tien lessen staat te lezen:

Lesson 7 + 8
Shortest routes
- Students do one by trial and error
- Discuss: is there a method
- Present 'Shortest Route Algorithm'
- Try with different networks

Ik kan mij best voorstellen dat brugpiepers leuk met zo'n thema aan de gang gaan, en daar nog wat van opsteken bovendien. Het project SGS Math Enrichment Courses is de winnende inzending van het Maartens College voor de Wiskunde Scholen Prijs 2004. SGS betekent Small Group Subjects. In deze uren volgen leerlingen in kleine groepen cursussen naar keuze, waarbij de leerlingen bovendien uit verschillende klassen afkomstig zijn.

Zo rond de langste dag, op 25 juni 2004, reis ik af naar het Hoge Noorden om de afsluiting van dit project op de school bij te wonen en de prijs uit te reiken aan Heleen Tims. Heleen studeerde econometrie in Groningen en is uiteindelijk afgestudeerd in de economie. Na omzwervingen in de muziekwereld (conservatorium, pianodocent) heeft ze de lerarenopleiding voor wiskunde gedaan en is op het Maartens College terecht gekomen. De school, die ongeveer 1400 leerlingen telt, ligt in de statige wijk Helpman, heerlijk tussen het zonnige voorjaarsgroen. Voorafgaand aan de prijsuitreiking heb ik een boeiend gesprek met mijn naamgenote, op een zolderkamertje onder de balken van het statige gebouw waarin de International School huist.

Math Enrichment Courses

De Math Enrichment Courses maken deel uit van een gezamenlijk programma ('Small Group Subjects') voor de leerlingen van zowel TTO (klas 1 en 2) als IS (de klassen 1, 2 en 3). Leerlingen uit deze klassen kiezen op vaste SGS-uren uit allerlei cursussen die worden aangeboden. Dit zijn niet alleen de cursussen uit het Math Enrichment programma, maar ook cursussen op het terrein van Information Technology, Debate, Current Events en Drama. Elke leerling doet per trimester één cursus, waaronder één keer per jaar één wiskundecursus. (De trimester-indeling is overgenomen van de International School.)

Het aanbod voor wiskunde bestaat uit 12 verschillende cursussen, die op verschillend niveau zijn uitgewerkt. In het informatieboekje voor de leerlingen staat een overzicht:

Level A: For whiz kids who enjoy a real mathematical challenge:
- Computers and Binary Codes
- Topology
- Infinity
- Networks
- RSA codes

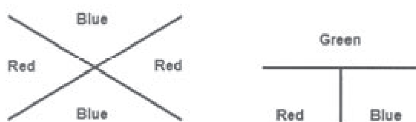
Level B: For whiz kids who prefer a small mathematical challenge:
- Fractals
- Map Colouring (zie figuur 1 en figuur 2)
- History of Codes
- Fibonacci Numbers
- Logic

Level C: For whiz kids who don't feel very comfortable with a mathematical challenge:
- History of Calculators
- Tessellations

FIGUUR 1 Een stukje uit de docentenhandleiding van de 1e les 'Map Colouring'

Map Colouring – Lesson 1

- Discuss: How many colours do you think you would need to colour any map? Why do you think so? Why would you want to colour a map with as few colours as possible? (costs)
- Try some:
  - Agree on rules
    - Two bordering regions must be different colours.
    - If regions touch only in a point, they may have the same colour.
  - Hand out copy of maps 1 and 2. Students try to colour with as few colours as possible.
- Discuss: Why is the minimum number of colours different in the two maps?
  - Map 1 has only X crossings- you only need two colours for that.
  - Map 2 also has a T crossing – you need three colours there.



- Hand out Swirltown and Boxville to colour
  - Finish for homework.
  - Write a sentence on what your strategy was to determine your colours and find the minimum.

Map colouring – Lesson 6

Graph colouring is also very useful for solving other types of problems than map colouring, for example: The Fish problem.

A tropical fish hobbyist has 6 kinds of fish: Alphas, Betas, Certas, Deltas, Epsalas and Fetas (A, B, C, D, E, F).
Some fish cannot be together in a tank because one eats the other, or they fight. The table shows which fish cannot be together:

Type	A	B	C	D	E	F
Cannot be with	B, C	A,C,E	A, B, D, E	C, F	B, C, F	D, E

How many tanks will the fish hobbyist need to hold his fish?

1. Make a graph in which each vertex represents a type of fish, and the edges connect the types that <u>cannot</u> be together.
2. Make a colouring of the graph using the algorithm from last lesson.
3. Think about:
   a. What does each colour in the graph represent?
   b. What does the chromatic number tell you?
   c. Can you solve the problem using the graph?

FIGUUR 2 Het centrale probleem van de 6e les 'Map Colouring'

Groepen van maximaal 12 leerlingen, die dus afkomstig zijn uit verschillende klassen, zijn 12 weken lang één lesuur per week met zo'n onderwerp bezig. Heleen heeft de meeste cursussen zelf samengesteld, gebruikmakend van diverse bronnen (internet, boeken, tijdschriften, kranten). Ze kreeg hiervoor extra uren ontwikkeltijd, met name ook om te zorgen dat alle leerlingen aan hun trekken zouden komen. Er moesten dus cursussen op verschillende niveaus ontwikkeld worden.
Kenmerkend is dat de cursussen niet tot op het niveau van 'sommetjes' zijn uitgeschreven. Het belangrijkste zijn de docentenhandleidingen waarin het lesplan staat. Er zijn dus geen kant en klare lespakketten die de leerlingen (zelfstandig) kunnen doorwerken. Heleen Tims gelooft ook niet in het laatste: onderwijs wordt ter plekke gemaakt, en de docent speelt daar een cruciale rol bij.
In dit opzicht is het Internationaal Onderwijs volgens Heleen ook principieel anders dan het Nederlandse onderwijs: in Nederland zijn de docenten erg schoolboek-gericht, terwijl op de Internationale Scholen de docenten het onderwijs veel meer zelf maken. En Heleen kan het weten, ze heeft zelf ook als kind op een Internationale School gezeten en kent daardoor die wereld veel beter dan het Nederlandse onderwijssysteem. Met het maken en geven van de Math Enrichment Courses is ze bezig sinds 1999.
Elk jaar worden er een paar cursussen bij gemaakt. Doel is om de leerlingen te inspireren en ervan te overtuigen dat wiskunde een vak is waarvan je kunt genieten en een vak met veel nuttige toepassingen.

Wat vinden de leerlingen er zelf van?

Volgens Heleen zijn de leerlingen in het algemeen enthousiast over de cursussen. Het is een aantal malen voorgekomen dat leerlingen door een Math Enrichment cursus ontdekten dat er wiskunde bestaat die ze wél kunnen, waardoor ze meer vertrouwen in hun wiskundige kwaliteiten kregen en het ook in de gewone wiskundelessen beter gingen doen.
Een leerling over map colouring: 'I liked map colouring but I didn't like welke vissen bij elkaar in de bak kunnen alhoewel ik het achteraf toch wel leuk vond.'
En een leerling over fractals: 'I liked to make something like that Snowflake. First it was very strange and later it began to see like a snowflake. Also that game with the dots I liked. Sometimes I didn't like the homework because if you didn't understand it you couldn't make it correctly. Maybe there should be more things to laugh about, but for the rest it was good. I don't know anything to make this course better. Sometimes I thought you would be mad if I didn't understand it, now I know there is nothing to be afraid of.'

Internationaal Onderwijs

Ik neem de gelegenheid tevens te baat om me te laten uitleggen hoe het internationale onderwijs eigenlijk is georganiseerd op het Maartenscollege.



FOTO 1 Heleen Tims op haar zolderkamertje met leerlingenwerk Vlakvullingen

Naast de theoretische leerweg van het vmbo, havo en vwo biedt de school ook TTO en IS aan. TTO staat voor TweeTalig Onderwijs en is bedoeld voor vwo+ leerlingen. Men doet het reguliere Nederlandse vwo-programma, alleen is de helft van de lessen in het Engels. Er zijn in Nederland zo'n 60 TTO-scholen.
De International School (IS) is echt iets anders, die heeft een eigen programma met ook een heel eigen sfeer. De leerlingen worden opgeleid voor het International Baccalaureate (IB). In Nederland zijn negen erkende International Schools die geaffilieerd zijn aan de overkoepelende internationale organisatie. Al het onderwijs gaat in het Engels. De leerlingen van 11 tot 16 volgen het Middle Years Programme, dat qua benadering te vergelijken is met de basisvorming. Daarna volgt dan nog twee jaar het Diploma Programme, dat toegang geeft tot een universitaire studie. Wereldwijd zijn er 1468 scholen die ongeveer 200.000 leerlingen opleiden voor het IB, verspreid over meer dan 119 landen (bron: *www.ibo.org*). De ontwikkeling van het IB is in 1968 begonnen in Zwitserland, toen een groep scholen het initiatief nam om een programma te maken voor de laatste twee schooljaren dat wereldwijd geaccepteerd zou worden als toegang tot een universitaire opleiding. Later is daar het Middle Years Programme bijgekomen en ook het Primary Years Programme voor kinderen van 3 tot 12 jaar.
Het bijzondere van het Maartens College is dat daar het IBMYP - International Baccalaureate Middle Years programme - zowel in de IS als in het TTO wordt uitgevoerd. Er zijn nog twee andere MYPTTO-scholen in Nederland en een stuk of twaalf scholen hebben serieuze belangstelling om dit programma te gaan invoeren.

Awards Ceremony

Alhoewel we lekkere broodjes en een boeiend gesprek hebben op het zolderkamertje, moet dit toch afgebroken worden, want eerst wacht de pers en daarna begint stipt om 14.00 uur de door de school georganiseerde *Awards ceremony* voor de *Math School Prize 2004*.
De plaatselijke pers is vertegenwoordigd met de Stadszender van de radio. In een kort interview legt Heleen nog eens uit wat haar *drive* is: *'Leerlingen laten genieten van wiskunde. Wiskunde zit overal in en dat kun je laten zien aan leerlingen. Alles om ons heen heeft met wiskunde te maken. Leerlingen hebben wiskunde vaak niet als favoriet vak, maar dat kan veranderen als ze ontdekken dat wiskunde op veel meer plekken voorkomt dan ze aanvankelijk dachten. "Is dit ook wiskunde?", vragen ze dan.'*
De prijsuitreiking vindt plaats in de aula van de school. Jackie Lamoré, Head of the International School, treedt op als ceremoniemeester. Het gelegenheidsprogramma wordt grotendeels gevuld door presentaties van de leerlingen. Zij vertellen



FOTO 2 Het geïnteresseerde publiek

in koppels over de onderwerpen die ze hebben bestudeerd: *tessellations*, *map colouring*, *logic* en *binary codes*. Uiteraard alles in het Engels, want de IS-afdeling van het Maartens College telt maar liefst 28 nationaliteiten. Het publiek bestaat uit leerlingen en hun ouders, collega's wiskunde en andere geïnteresseerden, waaronder vertegenwoordigers van de schoolleiding.
Na de praatjes van de leerlingen is aan mij de eer om de prijs uit te reiken aan Heleen Tims en het juryoordeel voor te lezen.

Juryoordeel

De jury was onder de indruk van deze inzending. Twaalf cursussen van twaalf lessen en dan ook nog op verschillende niveaus waaruit leerlingen mogen kiezen is een heel rijk en gevarieerd aanbod. Er worden moeilijke onderwerpen aangeboden, waar pittige dingen mee gedaan worden. Bijvoorbeeld het vierkleurenprobleem is wiskundig heel complex, maar aansprekend voor leerlingen en door de vertaling naar een graaf kan een zinvolle eerste stap gezet worden. Een enthousiaste docent is volgens de jury essentieel om bij dit type onderwerpen een vonkje te doen overslaan op de leerlingen.
De jury vindt dat de diverse onderwerpen in dit materiaal beter gepresenteerd worden dan diezelfde onderwerpen in de reguliere schoolboeken. In Engeland is ook heel veel van dit soort materiaal, maar dat is vaak veel oppervlakkiger.
De leerlingen worden heel serieus genomen en het taalgebruik is volwassen. Enkele juryleden vragen zich af of het materiaal echt bedoeld is voor de laagste klassen. Wat doet men dan wel niet in klas 4, 5 en 6?

Het feestelijke gebeuren wordt afgesloten met een borrel, waarna ik bovendien nog, samen met de familie van Heleen Tims, een rondleiding krijg door de school. De familie rekt de feestvreugde nog wat op met een etentje, en ik reis weer af naar het midden des lands.

Vakinhoudelijke kwaliteit docent

Terugkijkend op dit bezoek vond ik de opmerking van Heleen Tims over de docent die zijn of haar eigen onderwijs moet maken, in plaats van de leerlingen een tot in elk detail gestructureerd boek te laten doorwerken, het meest wezenlijk. Volgens Heleen is dit de enige manier om echt goed onderwijs voor elkaar te krijgen. In feite houdt ze hiermee een pleidooi voor het belang van de vakinhoudelijke en vakdidactische kwaliteit van een docent. In het huidige onderwijskundig klimaat waarin vooral aandacht is voor coachings- en begeleidingsvaardigheden, is het prettig een tegengeluid te horen. Zonder gedegen vakkennis kom je er niet als docent, althans niet bij deze groep leerlingen.

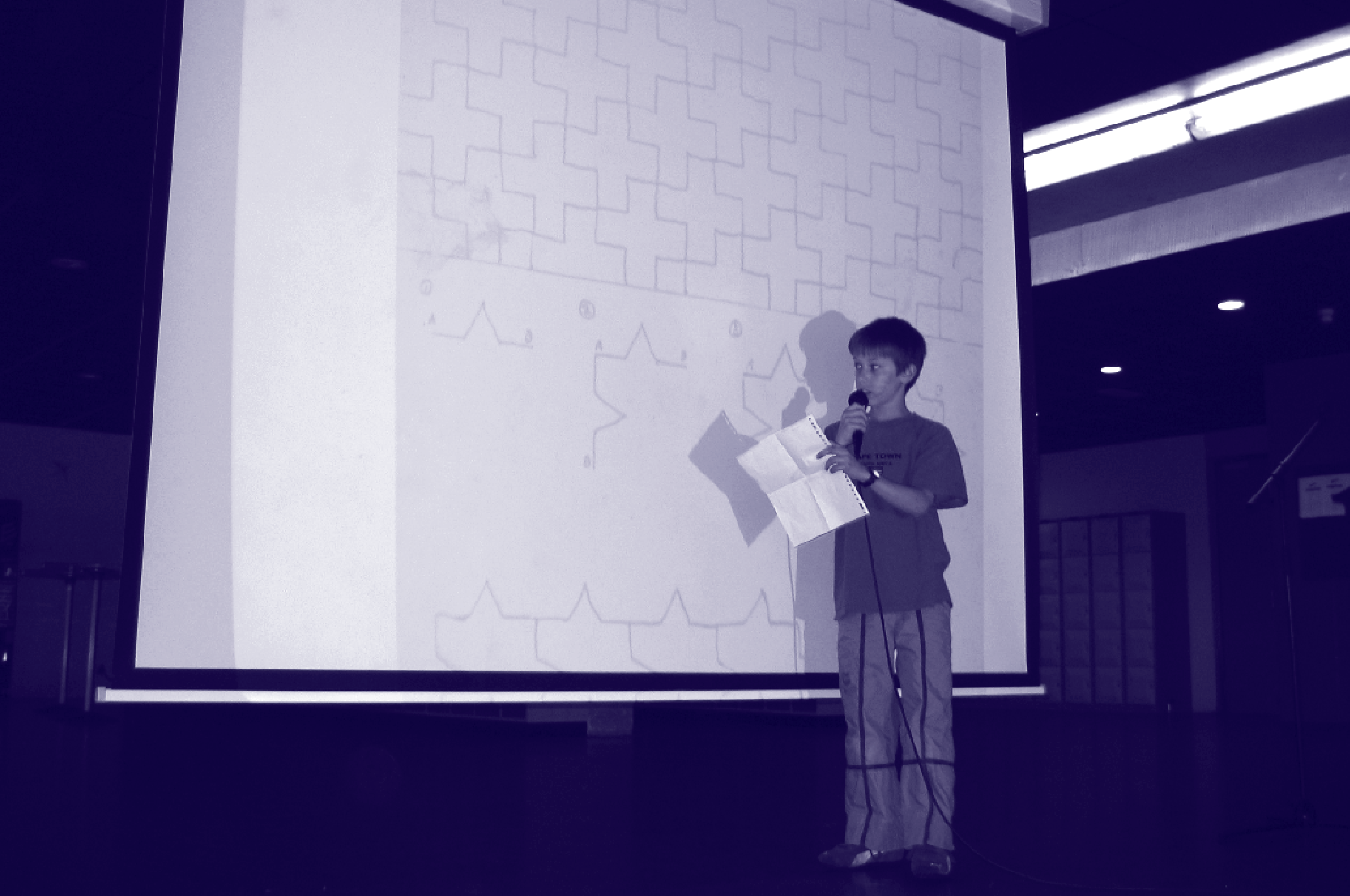


FOTO 3 Presentatie van het onderwerp Tessellations

Noot

Wie meer over dit project wil weten, kan contact opnemen met Heleen Tims, e-mailadres: p.p.h.tims@maartens.nl.

De Wiskunde Scholen Prijs is ontstaan uit het WisKids-project, dat inmiddels beëindigd is. De doelstellingen van WisKids zijn nog steeds actueel: het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder en het verbeteren van het imago van de wiskunde. WisKids was een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs.

Over de auteur

Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is Manager Beheer van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Eerder was zij o.a. betrokken bij het WisKids-project, waaruit de Wiskunde Scholen Prijs is voortgekomen.

1485. Van de rij $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k$ is gegeven $t_1 = 3$ en

$$t_{k+1} = t_k - 3 \, . \, 2^{-k}$$

voor elk natuurlijk getal k.

a. Bereken t_4.

b. Bewijs, dat de rij een sommeerbare meetkundige rij is.

c. Voor welke waarden van k is $t_{k+1} + t_k < 10^{-4}$?

1486. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} {}^2\log x + {}^2\log y = z \\ {}^2\log x - {}^2\log y = \sqrt{-3z^2 + 12z}. \end{cases}$$

a. Voor welke waarden van z is er een stel waarden van x en y dat aan dit stelsel voldoet?

b. Bereken x en z, als gegeven is $y = 4$.

c. Bereken de grootste waarde die x kan aannemen.

1496. Van een recht parallelepipedum ABCD–EFGH, waarvan ABFE in een projectiefiguur van dit lichaam door een rechthoek wordt voorgesteld, is het grondvlak ABCD een vierkant. AB $= 2p$ en AE $= p\sqrt{3}$. K is het midden van de ribbe AB.

a. Construeer het punt P, dat op de ribbe CG ligt en dat gelijke afstand heeft tot de lijnen EF, EH en EK.

b. Druk de onder *a* bedoelde afstand uit in p.

c. Bewijs, dat de punten E, F, H, K en P op één bol liggen.

1497. Gegeven is de bundel cirkels $x^2 + y^2 - 8 + \lambda(x + y) = 0$.

a. Bereken de coördinaten van de basispunten van de bundel. Bepaal de verzameling van de middelpunten van de cirkels van de bundel.

b. Stel de vergelijking op van die cirkels van de bundel, welke de cirkel, waarvoor $\lambda = 2$ is, loodrecht snijdt.

c. Elke cirkel van de bundel heeft een middellijn met richtingscoëfficiënt -1. Bepaal de verzameling van de eindpunten van deze middellijnen.

Eindexamen vhmo 1965, als vraagstuk opgenomen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 52 (1964-1965), pp. 234-236.

N.B. vhmo = voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. Voorbereidend hoger onderwijs werd gegeven aan het gymnasium (6-jarig), middelbaar onderwijs werd gegeven aan de hbs (5-jarig). De eindexamenopgaven voor wiskunde waren sinds enkele jaren gelijk. Het vak wiskunde werd in drie onderdelen geëxamineerd, te weten (1) Algebra en differentiaal- en integraalrekening, (2) Analytische meetkunde en goniometrie en (3) Stereometrie.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

EERSTE RONDE WISKUNDE OLYMPIADE

[Melanie Steentjes]

Algemeen

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd in twee ronden voor leerlingen van havo en vwo.
De Wiskunde Olympiade biedt aan leerlingen een kans om hun talenten te tonen bij het oplossen van ongebruikelijke, leuke en niet erg schoolse wiskunde. Inventiviteit is hierbij belangrijker dan pure kennis. Zo kan de Olympiade een middel zijn om jong talent op te sporen en te stimuleren en, meer algemeen, om de belangstelling van scholieren voor wiskunde te vergroten. Een belangrijk streven!
De eerste ronde vindt half januari plaats. Elke docent kan zich aanmelden als wedstrijdleider. Dit houdt in dat u half januari een wedstrijdzitting van twee uur organiseert, de opgaven corrigeert en de resultaten opstuurt. De beste 100 leerlingen van de 1e ronde worden uitgenodigd voor de 2e ronde, die half september gehouden wordt aan de TU Eindhoven.
Uit de winnaars van die tweede ronde wordt een team van zes leerlingen samengesteld en getraind dat Nederland vertegenwoordigt bij de Internationale Wiskunde Olympiade. In 2005 zal deze in Mexico gehouden worden, in 2006 in Slovenië.

Eerste ronde 2005

Op vrijdag 14 januari hebben 2221 leerlingen van 149 scholen zich gebogen over de opgaven van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Ze kregen twee uur de tijd om de antwoorden te vinden bij negen opgaven: vijf A-opgaven, waar per opgave 2 punten gescoord konden worden, en vier iets moeilijker B-opgaven waar 3 punten gescoord konden worden. Zie figuur 1 en 2 voor twee voorbeelden, één van een A-opgave (A2) en één van een B-opgave (B1) van dit jaar. Alle opgaven én antwoorden vindt u op de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (*http://olympiads.win.tue.nl/nwo/*).
Een leerling die alles goed had, zou dus een score van 22 punten gehaald hebben. Maar het viel dit jaar niet mee! De opgaven werden een stuk lastiger gevonden dan vorig jaar. Dit kwam tot uitdrukking in de score. De hoogste score die dit jaar gehaald werd, was 17 punten. De leerlingen die 6 punten of meer hebben gehaald, zijn uitgenodigd voor de tweede ronde, die op 16 september in Eindhoven zal zijn. Vorig jaar lag deze grens bij 15 punten, een heel verschil dus. Voor een uitgebreid overzicht van de resultaten verwijs ik u naar bovengenoemde website.

Deze score en opmerkingen van docenten en leerlingen hebben ons doen concluderen dat de opgaven dit jaar te moeilijk waren. Dit betreuren wij en we willen een herhaling voorkomen. Na overleg hebben we besloten om volgend jaar de A-opgaven in meerkeuzevorm te stellen, zoals bijvoorbeeld ook bij de Kangoeroe-wedstrijd gebeurt. Opgaven in meerkeuzevorm zijn in het algemeen makkelijker dan opgaven in open vorm. Ook kan een leerling altijd een keuze uit de alternatieven maken, zodat de frustratie over een leeg antwoordvel achterwege blijft. De B-opgaven zullen wel open blijven.

Scholenprijs

Dit jaar heeft het St. Ignatiusgymnasium in Amsterdam de Scholenprijs gewonnen van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De Scholenprijs gaat naar de school met de hoogste somscore van de vijf best scorende leerlingen. Het Sint

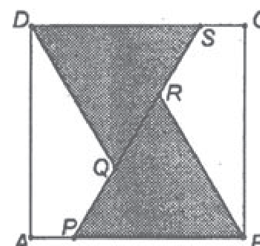
A2

Hoeveel verschillende armbanden van vier kralen kun je maken met rode, witte en blauwe kralen? Twee armbanden zijn niet verschillend als je ze in de ruimte zo kunt draaien dat de kleurvolgordes van de twee armbanden gelijk zijn.

B1

ABCD is een vierkant met zijde 4.
P ligt op *AB*, *S* op *CD* en *Q* en *R* op *PS* zó dat
1) $AP = CS$ en
2) de driehoeken *PBR* en *SDQ* beide gelijkzijdig zijn.

Hoe groot is de oppervlakte van die twee driehoeken samen?



Ignatiusgymnasium heeft zich niet laten afschrikken door de lastige opgaven en er waren maar liefst vier leerlingen met 11 punten en zeven leerlingen met 9 punten. Samen hebben ze dus voor een somscore gezorgd van 53 punten, de hoogste van het land.
Op 28 april werd de Scholenprijs uitgereikt. De nieuwe wisselbeker (een ontwerp van Koos Verhoeff) werd overhandigd aan een trotse Rob Piet, leraar op het St. Ignatiusgymnasium. De elf leerlingen ontvingen een beker met oorkonde, een puzzel en natuurlijk het bekende Olympiade-boekje. Daarnaast was er de Grote Wiskunde Quiz, waarin quizmaster Jan van de Craats (voorzitter van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade) lastige vragen afvuurde op leerlingen én op leraren van het Gymnasium. Een zeer geslaagde bijeenkomst.

Ook meedoen?

Enthousiast geworden? Wilt u met uw school die scholenprijs ook wel eens winnen? U kunt volgend jaar ook meedoen. Begin september worden aanmeldformulieren naar alle scholen gestuurd waarmee u zich kunt opgeven voor de eerste ronde. U kunt zich ook nu al opgeven. Mail of bel Melanie Steentjes (secretaris Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade): *Melanie.Steentjes@citogroep.nl*, 026-3521332. Ook voor meer informatie kunt u hier terecht. Alle docenten die zich opgeven voor de eerste ronde van 2006 ontvangen het boekje '*De Nederlandse Wiskunde Olympiade, 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden*'.

Over de auteur

Melanie Steentjes (e-mailadres: Melanie.Steentjes@citogroep.nl) is wiskundemedewerker en examenmaker van de Citogroep in Arnhem. Zij is tevens secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

PARALLEL

Het Wereldwiskunde Fonds helpt Zambia

[Arie van Kooten]



Als je ’s avonds in de trein zit, zie je in het raam je spiegelbeeld gezellig met je meebewegen in het donker. Totdat er opeens een tegemoetkomende trein aankomt. De mensen in die trein denderen dwars door jouw gespiegeld lichaam heen. Je schrikt van dat gevoel. En mensen in de andere trein schrikken natuurlijk net zo goed. Maar heb je hun spiegelbeeld wel eens door jouw lichaam voelen gaan?

In Zambia rijden de treinen niet op tijd maar op rails. Als je geluk hebt tenminste. Meestal rijden ze helemaal niet. Tekort aan brandstof. In Zambia is er van alles te weinig. Tekort aan voedsel, tekort aan water, tekort aan ziekenhuizen, tekort aan scholen, tekort aan leermiddelen, tekort aan alles. Behalve aan optimisme. Behalve aan liefde.

Het valt mij altijd weer op. Overal waar ik in Zambia kom lesgeven, word ik met open armen ontvangen. De baby’s worden in je handen gedrukt. Er wordt voorgedaan hoe men kookt en hoe men eet. En het weinige dat er is, wordt eerlijk verdeeld. Iedere gast is welkom. Zambia is niet vol.

Maar Zambia sterft langzaam aan de aids. Ik hou die aidspatiënten in mijn armen en ik praat ze moed in. Omdat ik mij verbonden voel met hen die minder geluk gehad hebben in dit leven.

Er zijn nu meer dan een miljoen aidswezen in Zambia. En elke week komen er duizenden bij. Mensen sterven in een verpletterende regelmaat. Terwijl ze eigenlijk door het westen in de steek gelaten worden. Er zijn aidsmedicijnen genoeg, maar de farmaceutische industrie wil daar grof aan verdienen. Dat lijkt me ook een ernstig tekort: een tekort aan menselijkheid.

De Zambianen die achterblijven gaan door met een bewonderenswaardige wilskracht. Zoals mijn vrienden van Mongu Teacher Training College in het uiterste westen van Zambia. Hoewel ze niet meer verdienen dan zo’n 50 dollar per maand, werken zij zich elke dag in het zweet in overvolle klaslokalen. Omdat ze weten dat iedereen een kans verdient. Omdat ze weten dat onderwijs een land kan redden.

Daarom is het goed dat ze weten dat niet iedereen ze in de steek laat. Dat er collega’s in Nederland zijn met het hart op de goede plaats. Ik ben er trots op dat het WwF zich verbonden voelt met hen die minder geluk gehad hebben in dit leven. Het WwF heeft geld gegeven voor materialen voor het wiskunde-ontdeklokaal. Zodat zij op een moderne manier les kunnen geven. Zodat studenten op een logische manier leren nadenken. Zodat ze leren samenwerken. Want dat is wat Zambia en deze wereld nodig hebben: mensen die zich met elkaar verbonden voelen. Bezit is nutteloos. Het enige dat een mens bezit is de omgang met zijn medemens.



Mijn Nederlandse studenten zijn niet altijd even wiskundig aangelegd. Laatst vroeg ik ze om een zin te maken met het woord ‘kwadraat’. Komen ze met zinnen als: ‘De mobiele telefoon is een enorme besparing qua draad.’ Maar ze hebben wel het hart op de goede plaats. Sommige van mijn studenten hebben in Afrika gewerkt, anderen hebben acties gehouden om leermiddelen in te zamelen.

Ik heb mijn studenten vaak zien twijfelen. Ze zien de overvloed en het individualisme van het westen. En aan de andere kant zien ze de collectieve armoede van Afrika. Het lijken wel twee parallelle werelden die altijd naast elkaar zullen blijven bestaan. Er zijn zoveel Zambiaanse kinderen die nodeloos sterven. Er zijn zoveel aidswezen die bij hun geboorte al volstrekt kansloos zijn. Iedereen kan het zien en iedereen heeft de keuze: hou je je ogen gesloten of open je je hart.

Als je je niet te druk maakt in deze wereld, kabbelt je leven gezellig met je mee. Totdat opeens het leed van die andere wereld op je afkomt. Het lijden van die mensen dendert dwars door jouw gedachten heen. Je schrikt. En mensen in die andere wereld schrikken natuurlijk net zo goed. Maar heb je hun lijden wel eens door jouw gedachten voelen gaan?

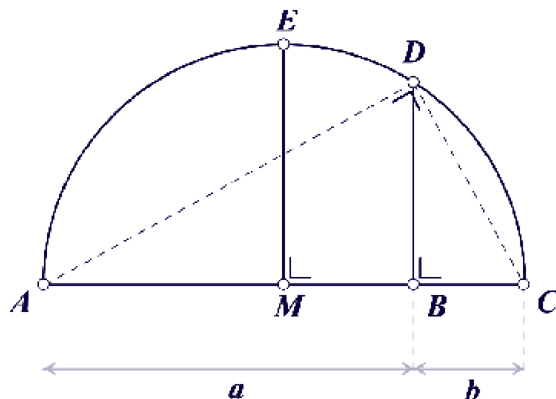
Vroeger hield ik meer van de projectieve meetkunde dan van de Euclidische: twee parallelle werelden zullen elkaar immers ooit moeten ontmoeten. Zodat iedereen eindelijk begrijpt dat er maar één wereld is.

Over de auteur

Arie van Kooten (e-mailadres: kooten.van.a@hsleiden.nl) heeft een wiskundige achtergrond maar werkt tegenwoordig als coördinator internationalisering van de Hogeschool Leiden. Hij heeft veel ervaring met werken in de Derde Wereld. Het project dat aanleiding was voor het bovenstaande verhaal, is het tweede WwF-project dat door hem is begeleid. Dit project vond plaats in Mongu, West-Zambia, en ondersteunde de inrichting van het wiskunde-ontdeklokaal.

KLASSIKAAL - MINIMALISEREN

[Dick Klingens]



Inleiding

In zijn rubriek *Optimaal* behandelde Rob Bosch in een vorig nummer van Euclides[1] 'Maximaliseren zonder differentiëren' o.a. aan de hand van de stelling:

Als de som van drie variabelen x, y en z constant is, d.w.z. x + y + z = c, dan is hun product maximaal voor $x=y=z=\frac{1}{3}c$.

Hieronder volgt een goniometrische toepassing van deze stelling die bij een behandeling van de som- en verschilformules van de sinus en de cosinus in de klas wellicht ook ter sprake gebracht kan worden.

Bekend is:

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

Deling van de teller en de noemer van de laatste uitdrukking door $\cos A\cdot\cos B$ geeft dan onmiddellijk de – vandaag de dag wellicht wat minder bekende – formule:

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

Toepassing in een driehoek

Voor de hoeken A, B, C in een willekeurige driehoek ABC geldt:

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C \qquad (1)$$

zodat

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\tan C \qquad (2)$$

waaruit we de volgende fraaie (en opmerkelijke) identiteit vinden:

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C \qquad (3)$$

Uit (2) volgt evenwel ook:

$$\frac{1-\tan A\cdot\tan B}{\tan A+\tan B}=-\frac{1}{\tan C}=-\cot C$$

en na deling van teller en noemer in het eerste lid door $\tan A\cdot\tan B$:

$$\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$$

of

$$\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A=1 \qquad (4)$$

Stellen we $P=\cot A\cdot\cot B\cdot\cot C$, dan is P in een **scherphoekige** driehoek maximaal als $P^2=\cot^2 A\cdot\cot^2 B\cdot\cot^2 C$ maximaal is. En dan kunnen we de hierboven genoemde stelling toepassen, immers:
$\cot^2 A\cdot\cot^2 B\cdot\cot^2 C=(\cot A\cdot\cot B)(\cot B\cdot\cot C)(\cot C\cdot\cot A)$
waaruit dan samen met (4) volgt:
P is maximaal als $\cot A\cdot\cot B=\cot B\cdot\cot C=\cot C\cdot\cot A$.
Zodat $\cot A=\cot B=\cot C$, en dus
$A=B=C=\frac{\pi}{3}$, met $P_{max}=\cot^3\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Dus:
In een scherphoekige driehoek ABC geldt:
$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$, en via (3) ook:

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$$

Dezelfde ongelijkheid, maar nu anders

In de figuur is $AB = a$, $BC = b$ en M het midden van het lijnstuk AC, zodat in de halve cirkel met middelpunt M en straal MA geldt: $BD=\sqrt{ab}$ (te bewijzen met herhaalde toepassing van de stelling van Pythagoras of met gelijkvormigheid) en $ME=\frac{1}{2}(a+b)$. We zien nu dat $\frac{1}{2}(a+b)\geq\sqrt{ab}$, waarbij het gelijkteken geldt alleen als $a = b$.[2]
Of in woorden:
het rekenkundig gemiddelde van twee positieve getallen is groter of gelijk aan het meetkundig gemiddelde van die twee getallen.
Algemeen geldt voor positieve getallen x_k (we noemen in eerste instantie alleen de eigenschap):

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

Zodat, weer in een scherphoekige driehoek ABC:
$$\frac{1}{3}(\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C)=\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)\geq \sqrt[3]{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}$$
Of, met $Q=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ (waardoor $Q > 0$, vanwege het scherphoekig zijn van de driehoek):

$$Q^3\geq 27\cdot Q$$
$$Q^2\geq 27$$
$$Q\geq 3\sqrt{3}$$

En ook nu vinden we: $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$.

Uitdagingen voor leraar en leerling?

a. Het bewijs van de in de laatste paragraaf genoemde stelling over de relatie tussen het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde is voor $n = 4$ eenvoudig te leveren, immers:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(a+b+c+d)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\right)\\&\geq\sqrt{\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{1}{2}(c+d)}\\&\geq\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt{\sqrt{abcd}}\\&=\sqrt[4]{abcd}\end{aligned}$$

Maar hoe zit het dan met $\frac{1}{3}(a+b+c)$? We nemen, zoals zo vaak, onze toevlucht tot een kunstgreep[3].

Stel $d=\frac{1}{3}(a+b+c)$, zodat $a + b + c + d = 4d$, en pas de eigenschap opnieuw toe voor $n = 4$.
We vinden dan:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}(a+b+c+d)\right)^4&\geq abcd\\d^4&\geq abcd\\d^3&\geq abc\\\frac{1}{3}(a+b+c)&\geq\sqrt[3]{abc}\end{aligned}$$

De voor de hand liggende klassikale vraag is nu: hoe bewijs je de ongelijkheid voor vijf, zes, ... getallen?

b. Bewijs dat uit $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ volgt:
$A + B + C = 180°$.

c. Onder de positieve natuurlijke getallen is er slechts één drietal, nl. 1, 2 en 3, dat voldoet aan
$x + y + z = xyz$.
Er bestaan dus (zie b) driehoeken met $\tan A = 1$, $\tan B = 2$, $\tan C = 3$.[4]
Een extra gegeven, bijvoorbeeld de hoogte $CF = h$, legt driehoek ABC vast. Deze is dan 'gemakkelijk' met passer en liniaal te construeren door uit te gaan van de straal R van de omgeschreven cirkel (zie [5]). Toon daartoe eerst aan dat $R=\frac{1}{4}h\sqrt{10}$.

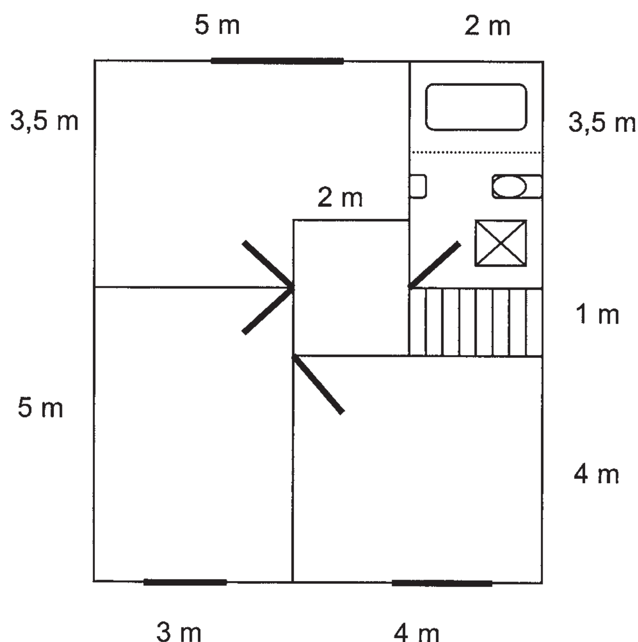
Noten

[1] Zie Euclides 80(1), p. 033.
[2] Deze constructie komen we ook al tegen bij Pappos van Alexandrië (290-350), in Boek 3 van zijn 'Synagoge'.
[3] Ook toegepast door A.L. Cauchy (1789-1857) in zijn 'Cours d'Analyse de l'École Polytechnique' (1821).
[4] En dan is dus $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$. Ook opmerkelijk!
[5] R. Kooistra: Sprokkel LXXXIII. In: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 55 (1967/1968), pp. 119-121.

Over de auteur

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.nl) is verbonden aan het Krimpenerwaard College en is tevens eindredacteur van Euclides.

4 Modelleren [Bert Zwaneveld]



Belang van modelleren

Wiskunde houdt zich niet met concrete objecten bezig, maar met abstracties daarvan. Op school, in het dagelijks leven, in andere vakken en in het vervolgonderwijs wordt wiskunde gebruikt bij het oplossen van problemen uit concrete situaties. Daartoe moeten die situaties zo beschreven worden dat wiskunde ook inderdaad bruikbaar is. Dat betekent: modelleren. Dit modelleren is dan ook waar het volgens mij in het wiskundeonderwijs om moet gaan.

Kamer inrichten

Een rijke context voor modelleren is het inrichten van een kamer, gegeven een zeker budget. Zoiets kan heel goed projectmatig door een groepje leerlingen worden aangepakt.
Een van de eerste stappen is een tekening op schaal van de vloer maken. In figuur 1 is een mogelijke, maar onvolledige schaaltekening weergegeven, ontleend aan *Moderne wiskunde*. Alle aspecten van modelleren zitten in deze activiteit: vereenvoudigen, schematiseren, de essentie weergeven (bijvoorbeeld: plaats van ramen, deur, stopcontacten, zonzijde). Er zijn doe-activiteiten voor buiten het lokaal: meten, het verzamelen van gegevens over spullen en materialen (afmetingen en kosten). Bij het maken van de schaaltekening en de begroting moet er behoorlijk wat gerekend worden. Vervolgens komt het plaatsen van het meubilair en de computer, gegeven de plaats van het elektra en van de internetaansluiting. Afhankelijk van de grootte van het project komen hier zaken bij als de inrichting en de kosten daarvan: verven, behangen, vloerbedekking, meubilair, verlichting, enzovoort. Doel van dit projectonderwijs kan zijn het opstellen van een plan van aanpak, inclusief schatting van de doorlooptijd, werktekeningen en begroting van de aan te schaffen spullen en materialen en van de werkzaamheden voor de inrichting. Daarbij worden allerlei keuzes gemaakt. Die moeten benoemd en verantwoord worden.

Wiskundige kernen

Maar voor de wiskundeleraar gaat het om de wiskundige kernen (begrippen, methoden, probleemaanpak, hulpmiddelen als een spreadsheet voor het maken van de planning en de begroting), kortom het denk- en leerwerk dat de leerlingen in een dergelijk project moeten verrichten.
In dit project zitten voldoende aanknopingspunten om dieper in de algebra te duiken die veelal bij modelleren hoort. De vervolgvraag zou kunnen zijn om een programma te maken, bijvoorbeeld in Excel, dat oppervlakte en inhoud uitrekent van kamers waarvan de afmetingen worden opgegeven. Daarbij hoort een wiskundige kern als: ‘bij een verdubbeling van de afmetingen verviervoudigt de oppervlakte en verachtvoudigt de inhoud’, en daarbij horen dus ook de formules die daarvoor in de spreadsheet moeten worden ingevoerd. Dat biedt voldoende aanknopingspunten om formules als $y = x^2$ (oppervlakte) en $y = x^3$ (inhoud) en misschien ook wel $y = x^{-1}$ (oppervlakte per inhoud) te bestuderen.

Biologie

Ook hier is wellicht in projectvorm wat aan te doen, bijvoorbeeld samen met de leraar biologie, naar aanleiding van vragen als: hoe zit het met de temperatuurhuishouding van je kat, en met die van je hond die ongeveer twee keer zo groot is als je kat? Je hond heeft vergeleken met je kat ongeveer acht keer zoveel cellen, dus acht keer zoveel 'kacheltjes' die warmte produceren, terwijl hij maar vier keer zoveel oppervlakte heeft om die geproduceerde warmte af te voeren. Hoe zit dat?
Het dierenrijk levert ook de volgende context. Sterkte van botten of van spieren wordt bepaald door de doorsnede van botten, respectievelijk spieren. Een tweemaal zo groot dier is dus viermaal zo sterk, terwijl het toch om achtmaal zoveel massa gaat (of gewicht, als dat de voorkeur heeft). Hoe doet zo'n tweemaal zo groot dier dat? Denk in dit verband aan grote dieren als olifanten of dinosaurussen. Heeft het uitsterven van de dino's hier iets mee te maken? Maar waarom de dino's wel en de olifanten dan niet? Hier moet toch wat mee gedaan kunnen worden!

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl) is hoogleraar 'professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit Nederland. Hij was wiskundeleraar, en redactievoorzitter en hoofdredacteur van Euclides.

Boekbespreking / Een wiskundige op de beurs

Verplicht voor iedereen die wil gaan beleggen

Auteur: John Allen Paulos

Uitgeverij: Bert Bakker, 2004 isbn 90 351 2588 6; prijs € 19,95

[Chris van der Heijden]



Inleiding

De neergang van het internetbedrijf WorldCom was voor John Allen Paulos de aanleiding om het boek *'A Mathematician Plays the Stock Market'* te schrijven. De schrijver is tegen beter weten in veel aandelen blijven kopen van dit bedrijf, ook toen zonneklaar bleek dat dit bedrijf op springen stond. Kennelijk kunnen psychologische factoren iemands gezond verstand zo vertroebelen dat men onbewust blijft vasthouden aan een verkeerde strategie. Het is te vergelijken met de man die tegen zijn dokter klaagde dat zijn vrouw al een paar jaar geloofde dat ze een kip was. Hij wilde al eerder hulp zoeken, zei hij, 'maar we konden de eieren zo goed gebruiken.' (Blz. 59.)
Kan een boek dat handelt over zulke prozaïsche onderwerpen als beleggen en wiskunde, werkelijk aantrekkelijk zijn om te lezen? Het antwoord is een volmondig ja, de schrijver is hier zeker in geslaagd. John Paulos beschrijft verschillende beleggingstrategieën en de daarbij behorende valkuilen. Hij maakt moeilijke begrippen duidelijk met aansprekende vergelijkingen en anekdotes.
Voor beleggen is kennis van de beurs nodig, maar deze kennis is altijd fragmentarisch van aard. Het begrip *common knowledge* houdt in dat men weet dat andere beleggers ook een stukje weten van de hele legpuzzel. Beleggen komt dan ook vaak neer op anticiperen op anticipaties van anderen. Het peilen van beleggers is daarom minstens zo belangrijk als het peilen van de beleggingen.

Strategieën

John Paulos beschrijft beleggingsstrategieën met een verhoogd risico voor mensen die durven, en strategieën voor mensen die op zekerheid spelen.
In het eerste geval kan men snel rijk worden, maar

ook snel arm; in het tweede geval moet men zich afvragen of men niet net zo goed zijn geld op de bank kan zetten. Want hoewel de gedachte bestaat dat verstandig beleggen op de beurs op lange termijn altijd voordeel heeft - omdat het gemiddelde koersverloop stijgt - wordt vergeten dat in de loop der tijd veel bedrijven van de beurs verdwijnen omdat ze failliet gaan en dus niet meer inbegrepen zijn in de berekening van dit gemiddelde. De schrijver vergelijkt dit met ‘opleidingen die studenten toestaan om de cursussen waar ze voor zakken te laten vallen. De gemiddelde cijfers van scholen met zo’n beleid zijn, door de bank genomen, hoger dan die van scholen die strenger zijn. Maar deze opgepompte gemiddelde cijfers zijn dan natuurlijk niet langer een betrouwbare aanwijzing voor de prestaties van studenten.’ (Blz. 46.) Tot de strategieën waarmee men snel rijk kan worden, behoren er ook die misschien moreel verwerpelijk zijn. Voorkennis kan voordeel opleveren, mits anderen geen gebruik maken van die voorkennis. Bewust onterecht aanprijzen van aandelen en ze dan bij stijgend koersverloop verkopen (pompen en dumpen) of aandelen verkopen, deze vervolgens ten onrechte in een verkeerd daglicht stellen, en ze bij koersval terugkopen (shorting and distorting) zijn ook zulke strategieën.

Wiskunde en statistiek

[redacted] voorbeelden, zonder veel gebruik te maken van formules. Aan de orde komen, soms oppervlakkig: rekenkundig en meetkundig gemiddelde, voortschrijdend gemiddelde, de contante waarde van een aandeel (financiële rekenkunde), exponentiële groei (het getal e), verwachtingswaarde, variantie, standaardafwijking, covariantie, speltheorie, Markov-ketens en het statistische verschijnsel van de terugkeer naar het gemiddelde. Het kan immers verstandiger zijn om aandelen te kopen van een bedrijf met een lage koers/winst-verhouding, dan van een succesvolle onderneming met een hoge koers/winst-verhouding. Niet wiskundig, maar erg interessant is hoofdstuk 6 over opties. Puts, calls en hedges worden duidelijk beschreven.
Strategieën die bij afzonderlijke toepassing verliesgevend zijn, kunnen in mengvorm wél rendement opleveren. In dit verband wordt de paradox van de Spaanse natuurkundige Parondo genoemd (blz. 72). De wet van Benford (blz. 96) zegt dat in een grote variëteit van getallen onevenredig veel getallen met het cijfer 1 beginnen, namelijk 30%, met het cijfer 2 in 18% en met het cijfer 3 in 12½% van de gevallen. Getallen die beginnen met het cijfer 9, treden veel minder vaak op, minder dan 5%. Deze wet leent zich ervoor om in eerste aanzet snel te controleren of iemand bijvoorbeeld gefraudeerd heeft bij het invullen van zijn belastingformulier.

Onbekende namen

De hier genoemde voorbeelden vormen slechts een kleine greep uit de rijke inhoud van dit boek. Een klein minpunt is dat de schrijver telkens namen aanhaalt van Angelsaksische economen en beursspecialisten die, met uitzondering van enkele Nobelprijswinnaars, waarschijnlijk totaal onbekend zijn voor de lezer.

Tot slot

Wiskunde op de beurs mag dan misschien een hulpmiddel zijn, maar de schrijver toont aan dat psychologische factoren toch vaak van doorslaggevende betekenis zijn.
Studies suggereren dat passief geleden verliezen minder spijt veroorzaken dan verliezen die voortkomen uit actieve betrokkenheid. Iemand die volhardt in een oude belegging die zakt met 25% is minder van zijn stuk gebracht dan iemand die overstapt naar een belegging die vervolgens met hetzelfde percentage zakt (blz. 36).
Beleggers nemen dan ook vaak meer risico’s om verliezen te vermijden, dan risico’s om winst te behalen.
Enigszins hiermee in tegenspraak is de volgende anekdote (blz. 38). Een man in een hotelkamer kan niet slapen. Hij sluipt ’s nachts uit zijn bed met $5,00 in de zak van zijn badjas en gaat gokken in [redacted] nog één keer zijn geluk te beproeven en gaat naar een naburig casino. Hij zet in en verliest alles. Platzak keert hij terug in het echtelijke bed. Zijn vrouw vraagt: ‘Waar was je?’ Hij antwoordt: ‘Ik kon niet slapen en ik ben gaan gokken.’ ‘Hoe ging het?’, vraagt zijn vrouw. ‘Niet slecht, ik heb maar $5,00 verloren.’

Voor wie wil gaan beleggen is dit boek een aanrader. Hij of zij ziet er dan misschien wel van af.

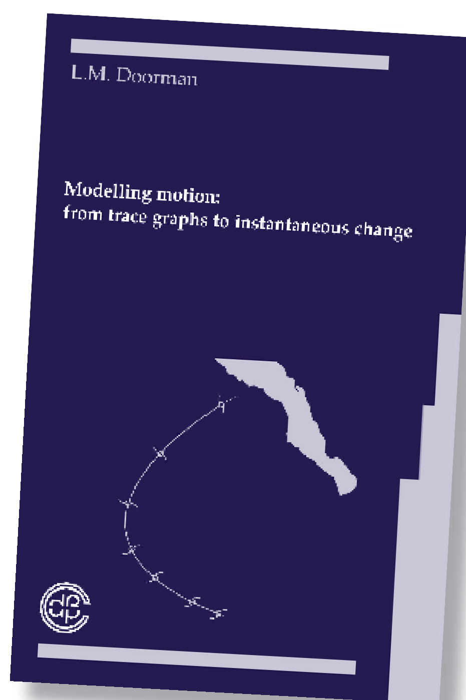
Over de recensent

Chris van der Heijden (e-mailadres: chris-van-der-heijden@wxs.nl) was van 1969 tot 2001 wiskundedocent en later ook schoolleider aan de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse.

MODELLING MOTION: FROM TRACE GRAPHS TO INSTANTANEOUS CHANGE

Michiel Doorman promoveerde in maart 2005 op een onderzoek naar het ontwerpen van een lessenserie over differentiëren en kinematica. Een bespreking.

[Pauline Vos]



Doorzien en Doorman

In de jaren tachtig van de vorige eeuw leerden we Michiel Doorman van het Freudenthal Instituut kennen als de maker van het softwareprogramma *Doorzien*. Met *Doorzien* kon je driedimensionale figuren draaien, kantelen en doorsnijden. We zaten nog in het MsDOS-tijdperk, en het programma was zeer vernieuwend: het was nieuw (toen!) om als gebruiker een 3-d object op een 2-d beeldscherm te kunnen kantelen en draaien. Het programma had ook al een menustructuur. Bovendien gaf het de leraar veel mogelijkheden om te kiezen hoe het ingezet kon worden. Leerlingen konden met een kubus of een piramide eindeloos experimenteren: proberen, kijken, uitwissen, opnieuw proberen. Wiskunde werd er een exploratief vak door. En je kon er uitslagen mee genereren, inclusief plakrandjes, zodat we ook met de schaar aan de gang konden. Ik was één van de wiskundeleraren die erg blij was met *Doorzien*. Wat mij betreft hadden ze Doorman een eredoctoraat mogen verlenen voor *Doorzien*, zo vernieuwend was het destijds. Of anders had het promotietraject misschien klassieker gekund met een proefschrift over het ontwerpproces van *Doorzien*. Met de achtereenvolgende pilotversies en met observaties van het gebruik in de klas had er een prachtig onderzoeksverslag kunnen liggen. Een proefschrift moet daarnaast ook theoretische beschouwingen bevatten. Die hadden bijvoorbeeld kunnen gaan over exploratief-gestuurd leren en computer-ondersteund leren.

Promotietraject

Maar promoveren was destijds voor medewerkers van het Freudenthal Instituut minder gebruikelijk. Eind jaren negentig veranderde dit en werd een aantal promotietrajecten gestart, waaronder die van Van Amerom, Bakker, Van den Boer en Drijvers. Ook Doorman schaarde zich in dit rijtje.
Zijn onderzoek vertrekt bij het volgende probleem: veel leerlingen in de vierde klas hebben problemen bij het leren van calculus én bij het leren van kinematica. Wiskundeleraren behandelen eerst de afgeleide. Een paar maanden later behandelen

natuurkundeleraren snelheid en versnelling en hebben hiervoor diezelfde afgeleide nodig. En vaak lijkt het dan alsof de leerlingen de wiskundige symbolen onvoldoende hebben begrepen en moet de natuurkundeleraar alles opnieuw uitleggen.
En daarmee rijst de logische vraag: 'Kan dat nou niet efficiënter?' Dit heeft Doorman omgezet in een operationele vraag: als ik een lessenserie met werkbladen en ICT-ondersteuning maak over de afgeleide én de bewegingsleer samen, zodat wiskunde- en natuurkundelessen worden geïntegreerd, gaat die kruisbestuiving dan goed?
Na het neerzetten van bovenstaand onderzoeksprobleem in hoofdstuk 1 graaft Doorman in het onderzoek dat al gedaan is op het gebied van leerproblemen rondom differentiëren en beweging. Wiskunde- en natuurkundedidactiek worden hier verweven. Er zijn al veel leraren en onderzoekers geweest die hebben geëxperimenteerd met hun lesopbouw en met de inzet van ICT, of die hebben geobserveerd hoe leerlingen met problemen rondom de afgeleide en het snelheidsbegrip worstelen. Veel natuurkundeleraren zullen het probleem kennen dat leerlingen het begrip *snelheid* zien als een eigenschap ('deze auto kan 190 km/h') en niet als een quotiënt van de eenheden *afstand* en *tijd*. De alledaagse ervaringen met de kilometerteller in de auto blijken leerlingen soms meer tegen te werken dan te helpen. En heel wat leerlingen interpreteren een afstand-tijd-grafiek die eerst stijgt en daarna daalt als een berg-achtig traject waarop eerst naar boven en daarna naar beneden gereden wordt. Dit hoofdstuk kan ik aanbevelen aan een ieder die zich wil verdiepen in leerproblemen rondom de afgeleide en de kinematica. Eén kleine kanttekening: ik miste een verwijzing naar de Amerikaanse Calculus Reform Movement uit de jaren tachtig, baanbrekend bij het toepassen van ICT in de analyse. Ook Nederlandse publicaties komen er bekaaid van af[1].

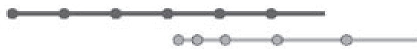
Hypothetisch leertraject

Doorman (en zijn team van adviseurs) ging niet meteen zelf lessen ontwikkelen. In een promotieonderzoek moet je goed gefundeerd aan het werk en daarom observeerde hij eerst lessen over de afgeleide op één school (4-vwo, N-profiel). Deze lessen verliepen aan de hand van al bestaand materiaal. Dit gaf inspiratie. Doorman schreef vervolgens zijn materiaal en testte dit op twee scholen. Hierna stelde hij het materiaal bij: meer open vragen en een betere docentenhandleiding. Deze laatste versie werd op één school getest. Daarmee levert het onderzoek een *hypothetisch leertraject* op. Dit is een duur woord voor het ontwerp van een didactische aanpak om leerlingen langs diverse hobbels te leiden. In de praktijk is het een lespakket: werkbladen voor tien lessen, bijpassende software en een docentenhandleiding. Voor de geïnteresseerde leraren: de werkbladen zijn niet opgenomen in het proefschrift, maar kunnen worden gedownload van Doormans homepagina (*www.fi.uu.nl/~michiel/*). Doorman heeft een mooie vondst om de leerlingen te motiveren: de voortschrijdende positie van het oog van een orkaan, met de prikkelende vraag wanneer de orkaan land gaat treffen. We komen in het lespakket ook oude succesnummers tegen uit de Hewet-proefpakketjes: de cheetah die op een zebra jaagt, en Heer Bommel met een snelheidsovertreding. Nieuw voor mij was de hellingbaan van Galileo, waarop je een balletje schuin naar beneden kunt laten rollen. Op de helling zitten boogjes met een belletje. Galileo wilde de boogjes zo plaatsen dat het rollende balletje een constant ritme maakt: ting-ting-ting-ting!
Op de website zijn ook online beschikbaar de twee applets die bij de lessen horen. *Flash* simuleert een natuurkundepracticum, waarbij stroboscopische foto's van vallende en vliegende objecten kunnen worden omgezet in tabel en grafiek. *Slope* is wat kaler en laat je een koorde aan een grafiek leggen en inzoomen om te kijken of het elkaar raakt.

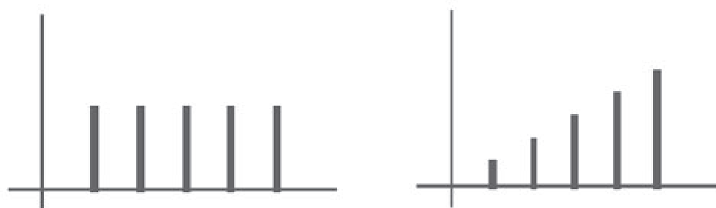
Ik heb het lespakket aan een natuurkundeleraar voorgelegd. (Henk, bedankt!) In onze discussie bleek dat de lessen meer wiskundig dan natuurkundig zijn. Mijn gesprekspartner vond het materiaal 'moeilijk en weinig praktisch' voor de beoogde doelgroep, met grote stappen van concreet naar formeel. Doorman legt bijvoorbeeld uit wat een stroboscopische foto is. Elke natuurkundeleraar weet echter dat de *ervaring* met knipperlichten een veel beter leerresultaat oplevert dan alleen de *uitleg*. Wellicht kan in een volgend onderwijsexperiment, als natuurkunde ook tijd investeert in het samenwerkingsproject, een stroboscopen-practicum worden toegevoegd. Ook de hellingbaan van Galileo met de rinkelende bellen nodigt uit tot een levendig practicum. En de opgave over het meten van de maanbeweging, door 's avonds te kijken over een lantarenpaal, is onuitvoerbaar in de schoolpraktijk (blz. 5 van het lespakket). Dan moet je maar hopen dat je aan een avondschool werkt, dat het twee avonden achtereen onbewolkt is, én geen nieuwe maan!

Didactische truc

Maar verder vond ik, als voormalig wiskundelerares, het lespakket vooral aan het begin prettig rustig opbouwen, met een simpele didactische truc voor het beschrijven van beweging. Het werkt als volgt. We gaan eerst de afgelegde weg op een kaart tekenen, met stippen (zie figuur 1). Elke stip is de positie van een bewegend voorwerp op een bepaald moment - als sporen in het zand. Als je de stippen met vaste tijdsintervallen tekent (bijvoorbeeld elke seconde), dan heb je een soort stroboscopische foto. Vervolgens beschouw je deze afgelegde weg als een lange strook en knipt deze bij elke stip door. De strookjes leg je verticaal naast elkaar; je krijgt dan een discrete grafiek (een soort staafdiagram). Bij de twee bewegingen uit figuur 1 horen de twee grafieken uit figuur 2. Korte stroken komen door een lagere snelheid, lange stroken door een hogere snelheid. De



FIGUUR 1



FIGUUR 2

discrete grafiek is daarmee een primitieve snelheid-tijd-grafiek (eigenlijk is het een grafiek van de gemiddelde snelheid per tijdsinterval tegen de tijd). Deze discrete grafiek staat dicht bij de reële beweging zoals die door de leerling wordt ervaren, en er kan al goed mee geredeneerd worden. Bijvoorbeeld waarom bij een eenparig versnelde beweging (met steeds langere strookjes) de eindsnelheid afhankelijk is van de tijd. Ook is goed te beredeneren waarom bij een eenparig versnelde beweging met eindsnelheid v de totale afgelegde weg gelijk is aan een constante beweging met snelheid $\frac{1}{2}v$. Een sublieme visualisatie van $s=\frac{1}{2}v\cdot t$. Met dit type grafiek kan vervolgens de overgang naar een continue snelheid-tijd-grafiek gemaakt worden.
De didactische aanpak om een beweging via stippen in een discrete grafiek te beschrijven is overigens niet geheel origineel, maar ontleend aan de Amerikanen Andrew Boyd en Andee Rubin[2]. Zij lieten leerlingen in de wiskundeles grafieken maken aan de hand van videobeelden. Ook André Heck[1] van de Universiteit van Amsterdam gebruikte stippen uit videobeelden om kinematica en analyse te verbinden.

Verantwoording

In een proefschrift gebaseerd op *ontwikkelingsonderzoek* gaat het echter niet primair om het lesmateriaal, maar om het wetenschappelijk onderzoek dat aan het ontwikkelingsproces ten grondslag ligt. Ik ken een zeer mooi proefschrift over het ontwerp van een softwarepakket dat voor de doelgroep onbruikbaar bleek: experiment mislukt, onderzoek geslaagd. Dit contrast is overigens niet op Doorman van toepassing: zijn lesmateriaal is interessant, maar nog niet op alle punten uitgekristalliseerd. Hij is zelf overigens de eerste om dat op te merken.
Doormans proefschrift bevat dus niet het lesmateriaal, wel de verantwoording ervan. Welke theorieën liggen eraan ten grondslag? Hoe zijn de testfasen verlopen? Wat leerden we van de testfasen? Wat leren we van dit onderwijsexperiment voor het ontwerpen van ander materiaal?
Hoofdstuk 3 gaat over processen bij het leren van wiskunde. Hier passeren begrippen de revue als taal- en kennisontwikkeling, interne en externe representaties, betekenisgevers, de 'learning paradox', enzovoort. Hoofdstuk 4 gaat over de opzet van het onderzoek en is een must voor mensen die geïnteresseerd zijn in het *ontwikkelingsonderzoek* met *emergente modellen*, zoals dit in de afgelopen jaren onder leiding van Koeno Gravemeijer aan het Freudenthal Instituut opgang is gaan maken. Uit dit hoofdstuk leerde ik het verschil tussen een *model van* en een *model voor*. Eens kijken of ik het correct kan navertellen: het traject van de orkaan met de stippen op de kaart wordt verknipt tot een discrete grafiek. Dit levert een concreet *model van* de snelheid van de orkaan. Hiermee bouwt de leerling de ervaring op dat met een discrete grafiek veranderende snelheden kunnen worden weergegeven. De grafiek wordt daarmee voor de leerling een *model voor* snelheid.

Inspiratie in de geschiedenis

Voor zijn lessen heeft Doorman ook inspiratie in de geschiedenis gezocht. Dit levert een stukje geschiedenis op, in het eerste deel van hoofdstuk 5, waarin wordt beschreven hoe Oresme (1360) en Galileo (1600) worstelden met het beschrijven van vallende voorwerpen. De discrete grafiek gaat terug naar Oresme. De redenering voor de formule voor de eindafstand van de eenparig versnelde beweging $s=\frac{1}{2}v\cdot t$ gaat terug naar Galileo. Deze ontdekkingshistorie gebruikt Doorman om de leerlingen mee te nemen in een proces van *geleid heruitvinden*. Het resterend deel van hoofdstuk 5 geeft een gedetailleerde beschrijving en onderbouwing van alle onderdelen van het lespakket, met een rechtvaardiging van alle keuzes die gemaakt werden tijdens het ontwerpen van de lessen.
Een wetenschappelijke aanpak dwingt een onderzoeker om zijn/haar gegevens netjes te vergaren en uit te werken. Doormans onderzoek is hiervan exemplarisch. Hij gebruikte geluidsband en videocamera bij de lessen, zodat de lessen herhaald bekeken kunnen worden. De opnames van de lessen werden uitgeschreven. De door de leerlingen ingevulde werkbladen werden geanalyseerd, evenals de resultaten van het proefwerk. De analyse geschiedde deels door derden, om bias te voorkomen. Deze procedures zijn bewerkelijk, maar noodzakelijk

om een bevlogen en hoopvolle onderzoeker te confronteren met de weerbarstige werkelijkheid: in de klas gaat het toch vaak een beetje anders dan er aan de tekentafel werd uitgedacht. Maar deze dwingende procedures voor de analyse van de observaties geven een verantwoorde basis voor verder nadenken. Hoofdstuk 6 bevat de uitputtende observaties van de experimenten. Dit is het langste hoofdstuk geworden, mede door de uitgeschreven episodes, waarin leraar en leerlingen letterlijk aan het woord komen.

Conclusies

Het laatste hoofdstuk besluit het onderzoek met conclusies en verdere aanbevelingen. Lessen met het terugkerende thema van het voorspellen van een traject, gepaard aan een grafische aanpak, open vragen en ondersteuning met ICT, blijken succesvol in dit onderzoek. Het siert Doorman voorts, dat hij aangeeft dat het experiment niet op alle punten volledig geslaagd is: het materiaal werkte niet altijd helemaal zoals gepland. Leerlingen bleken toch nog tegen onverwachte begripshobbels aan te lopen, maar van deze gegevens kunnen we weer veel leren. Bijvoorbeeld: de overgang van discrete verandering bij grafieken naar continue verandering bij functies (zonder grafiek) bleef een hobbel. Ook bleek, dat leerlingen soms te snel door het lesmateriaal heen fietsen en de grote lijn uit het oog verliezen. Samenvattende woorden door de leraar blijken dan te helpen. Hierdoor wordt het succes van het materiaal mede afhankelijk van de leraar. Wat het onderzoek ook parten speelde: er was soms te weinig tijd of de computers deden het niet. Kortom: de alledaagse lespraktijk vertroebelde het ideaal. Dit leidt tot de uitnodigende aanbeveling naar vervolgonderzoek.

Tot slot

Ik wil besluiten met de vermelding van twee belangrijke bijdragen van Doormans proefschrift aan een potentiële kwalitatieve verbetering van het wiskundeonderwijs.
Ten eerste levert het een bijdrage aan de discussie over een (gebrek aan) symbiose van wiskunde en natuurkunde. Dankzij dit proefschrift kwam ik bijvoorbeeld in gesprek met mijn natuurkundecollega. Dit leverde een spannende discussie op, waarin we ontdekten hoe groot de overlap is tussen onze vakken en hoeveel onze aanpak kan verschillen. Ik ben er, mede door dit proefschrift, verder in gesterkt dat er vruchtbare didactische kruisbestuivingen mogelijk zijn.
Ten tweede: er zijn ongetwijfeld onder de lezers/essen van Euclides mensen die een promotie-onderzoek overwegen. Het is dan een logische stap om zich te oriënteren op ontwikkelingsonderzoek, want enerzijds is dit in Nederland redelijk in de mode en anderzijds staat het ontwerpen van een innovatieve lessenserie dicht bij de onderwijspraktijk. Waaraan de lessen moeten voldoen, hoe de denkstappen verantwoord moeten worden en wat het vereiste jargon is waarmee onderzoek aan een academisch forum voorgelegd moet worden, dat is echter nog een hele klus. Doorman klaart deze klus op een overtuigende manier, houdt hoofd- en bijzaken gescheiden en blijft daardoor binnen de magische grens van 250 pagina's. Daarmee geeft zijn proefschrift een goede oriëntatie op wetenschappelijk onderzoek.

Met dank aan Gerrit Roorda en Marja Bos voor hun commentaren op de eerste versie van deze boekbespreking.

L.M. Doorman: Modelling motion, from trace graphs to instantaneous change.
Utrecht: CD-ß Press (2005)
ISBN 90-73346-59-2; prijs: € 17,50 (244 blz.)

Opmerking

Een Nederlandstalige samenvatting is beschikbaar op het web: http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0311-094207/sam.pdf

Noten

[1] Geïnteresseerden in onderwijsexperimenten rondom 'de afgeleide' kunnen bijvoorbeeld nog naslaan:
- A. Heck: Stilstaan bij lopen. In: Nieuwe Wiskrant 22(1). Utrecht: Freudenthal Instituut (2002), en
- J. Tolboom, L. Tolboom: Hellinggrafieken, het boek in de hoek. In: Nieuwe Wiskrant 23(1). Utrecht: Freudenthal Instituut (2003).
[2] A. Boyd, A. Rubin: Interactive video; a bridge between motion and math. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning (1), 57-93 (1996).

Over de auteur

Pauline Vos (e-mailadres: f.p.vos@rug.nl) promoveerde op een curriculumevaluatie en werkt aan het Instituut voor Didactiek en Onderwijsontwikkeling (IDO) van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen.

Van de bestuurstafel

[Wim Kuipers]

V

Verjonging

Het bestuur is in februari een actie gestart om studenten van eerste- en tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde aan universiteiten en hogescholen te interesseren voor het werk van de Vereniging. En dat is de moeite waard. Zeker nu de website gerestyled is en er een meer open communicatie met de leden mogelijk is.
Studenten worden uitgenodigd zich bij ons aan te sluiten en er met ons voor te zorgen dat wiskunde in het onderwijs in beeld blijft. Wiskunde als afzonderlijk vak, maar ook wiskunde als ondersteuning van andere vakken als we denken aan de beroepsgerichte vakken in het vmbo.
Kortom: we hebben jonge leden nodig die met ons mee willen denken. Zij kunnen tegelijkertijd gebruik maken van de producten op de site.

Gratis studentenlidmaatschap

Daarom nodigen we tot 15 december a.s. studenten uit om *een jaar lang gratis lid* te worden. Ze kunnen in die tijd kennismaken met wat het betekent lid te zijn van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Ik denk even aan het ontvangen van ons blad Euclides, inspirerend en vormend, en aan onze jaarvergadering met workshops en een brede markt. Dit jaar hopen we op 5 november weer velen te ontmoeten.
Als een docent van een eerste- of tweedegraads lerarenopleiding wiskunde dit leest: maak uw studenten attent op dit unieke aanbod!

Aanmelding

Aanmelding kan via de website, *www.nvvw.nl* (zie de knop ‘studenten gratis lid’), of door een berichtje te sturen naar de ledenadministratie: mw. Elly van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten, of per e-mail aan: *ledenadministratie@nvvw.nl*.

Een jaar lang gratis lid!

Let op: deze actie eindigt op 15 december 2005!

Jaarvergadering/Studiedag 2005

[Marianne Lambriex]

E

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2005 van de NVvW op *zaterdag 5 november 2005.*
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.00 uur
Plaats: ergens in de omgeving van Utrecht

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter, Marian Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2004
- Jaarverslagen (zie een volgend nummer van Euclides)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing
- Bestuursoverdracht
- Rondvraag
- Sluiting jaarvergadering

Studiedag met als thema: ’Wiskunde, een vak apart?!’

Over het themagedeelte van de studiedag

Dat het vak wiskunde onder druk staat, is intussen bijna iedereen wel opgevallen. Van vmbo tot hbo worden de wiskundeleraren uitgenodigd aan te geven waarom hun vak belangrijk is. En dat is best moeilijk. Moeilijk precies aan te geven wat het specifieke van wiskunde is en hoe het zich verhoudt met andere vakken. Een vak apart of een apart vak? De NVvW is er tegen dat wiskunde in de Tweede fase hetzelfde behandeld wordt als alle andere vakken, met evenveel lesuren en evenveel contacttijd, want wiskunde kun je niet zelfstandig thuis doen. Dus daar een vak apart. Maar wiskunde is ook een essentieel onderdeel van de beroepsvakken van laag tot hoog en daardoor dus een deel van het geheel van aan te leren vaardigheden en daarom weer niet apart. Misschien vinden we het als wiskundedocenten wel fijn dat we apart zijn, maar in dit tijdsbeeld werkt dit eerder tegen ons dan voor ons. Het imago van wiskunde is nog steeds niet verbeterd. De wiskundesecties in de nieuwe scholen hebben het heel zwaar, vinden het moeilijk wiskunde in projecten en modules aan te bieden en toch een leerlijn te behouden. Zijn we apart of niet? Blijven we apart of niet?
Vandaar het thema van de studiedag, in de hoop dat we wat kunnen bieden dat voor u richting aan uw denken over het vak kan geven. Er zijn ook dit jaar weer subthema’s, zoals:

- Hoe ziet wiskunde in het vmbo er als apart leergebied uit?
- Hoe ziet wiskunde er in de verschillende scenario’s uit?
- Hoe is wiskunde te integreren in andere vakken?
- Hoe gaat wiskunde er uit zien in de Tweede fase?
- Inzet van ICT.
- Actualiteit.

U ziet, er is voor een ieder wel iets interessants te vinden. Hoe het een en ander vorm gegeven wordt laten we u in de volgende Euclides weten.

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 5 november NVvW-dag.

Voor meer informatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex, *m.lambriex@nvvw.nl*.

[Frits Göbel]

Puzzel 808 Diameters

Het is een ervaringsfeit van pizza-eters: als de pizza groter is dan je bord, helpt het niet om de pizza in stukken te snijden. Met andere woorden, de diameter van een cirkel is niet zomaar klein te krijgen. Zelfs als je een pizza met z'n tweeën eet (ieder een helft), is het wel handig om een niet al te klein bord te hebben. We zijn hier al meteen bij onze eerste opgave beland.

Opgave 1

Verdeel een halve cirkel in twee stukken en leg die stukken zo aan elkaar dat de diameter van de nieuwe figuur zo klein mogelijk is.

Natuurlijk is de diameter van een figuur niet noodzakelijk gelijk aan de diameter van de kleinste cirkel waar hij in past. Een eenvoudig voorbeeld is de gelijkzijdige driehoek. Maar we nemen steeds de diameter van de figuur zelf als criterium.

Vaak wordt gevraagd bij dit type problemen: mag je stukken omkeren? Het antwoord is: 'Ja, tenzij het expliciet verboden is.' Bij mijn oplossing was het niet nodig om een stuk om te keren, maar als u mijn 'record' kunt verbeteren door een stuk om te keren: prima. Dit geldt ook voor de volgende opgave.

Opgave 2

Verdeel een eenheidsvierkant in twee stukken en leg die stukken zo aan elkaar dat de diameter van het resultaat kleiner is dan $\sqrt{2}$.

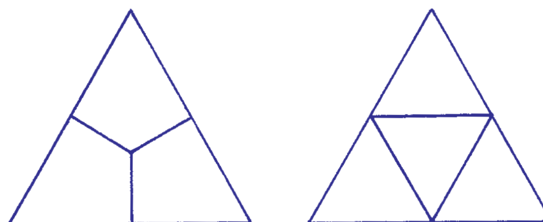
De gelijkzijdige driehoek heeft de eigenschap dat de diameter niet kleiner kan worden bij een verdeling in twee stukken. Het is zelfs zo dat minstens één van de stukken al dezelfde diameter heeft als de hele driehoek. Hetzelfde geldt voor iedere regelmatige $(2n + 1)$-hoek, en natuurlijk ook voor de cirkel. Maar voor al deze figuren geldt: bij een verdeling in meer dan twee stukken kan het maximum van de diameters wél kleiner worden.
Laten we ons beperken tot de gelijkzijdige driehoek. Onder een optimale splitsing in n stukken verstaan we een splitsing in n stukken met de eigenschap dat het maximum van de diameters minimaal is.

Laat $D(n)$ het maximum van de diameters zijn bij optimale splitsing in n stukken van een gelijkzijdige driehoek met zijde 1. Dan geldt: $D(1) = D(2) = 1$, $D(3) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $D(4) = \frac{1}{2}$ (zie figuur 1) en, enigszins verrassend, ook $D(5) = \frac{1}{2}$. De waarden van $D(n)$ voor $n > 5$ zijn mij niet bekend.

Opgave 3

Verdeel een gelijkzijdige driehoek zó in zes stukken dat het maximum van de diameters zo klein mogelijk is.

FIGUUR 1



Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 26 augustus 2005.

Veel plezier!

Oplossing 'De driehoek van Pascal'

Er kwamen 11 oplossingen binnen. Menige inzending ging vergezeld van extra werk zoals tekeningen, grafieken en informatie over het optreden van diverse jaartallen in onze driehoek. Hartelijk dank voor al deze bijdragen!

FIGUUR 2

1
11
101
1111
10001
110011
1010101
11111111
100000001
1100000011
10100000101
111100001111
1000100010001
11001100110011
101010101010101
1111111111111111
10000000000000001
110000000000000011
1010000000000000101
11110000000000001111
100010000000000010001
1100110000000000110011
10101010000000001010101
111111110000000011111111
1000000010000000100000001
11000000110000001100000011
101000001010000010100000101
1111000011110000111100001111
10001000100010001000100010001
110011001100110011001100110011
1010101010101010101010101010101
11111111111111111111111111111111
100000000000000000000000000000001

Opgave 1

De gevonden formules vertonen zeer grote verschillen. De mijne ziet er als volgt uit. $f(n)=(2^m+1)\cdot f(n-m)$, met m de grootste macht van 2 die deler is van n.
Voorbeeld: als n = 20, is m = 4, dus $f(20)=17\cdot f(16)$.
H.J. Brascamp, W. Doyer en A. Verheul leverden een bewijs van hun respectievelijke formules. Het antwoord op het tweede deel van opgave 1 is $f(30)=1431655765$.

De driehoek modulo 2 (zie figuur 2) lijkt sterk op de driehoek van Sierpinsky, zoals sommige inzenders vaststelden. Dit is frappant, want Sierpinsky maakte zijn driehoek op een heel andere manier.

Opgave 2

Het kleinste getal dat niet voorkomt in 'Pascal modulo 10' is 111.
Dit werd door velen gevonden, zij het niet in alle gevallen met een sluitende redenering.
Er zijn twee dingen na te gaan:
- 111 komt niet voor (A), en
- alle kleinere getallen komen wél voor (B).

(A.) Als je een plaatje maakt van de driehoek modulo 2, is dankzij de regelmaat te zien dat 1011 niet voorkomt, en dus ook niet bij de modulus 10. Hiermee is al aangetoond dat niet alle getallen voorkomen. Om verder te komen ligt het voor de hand modulo 5 te gaan kijken, en daar zie je dat 111 niet voorkomt: een aanzienlijke verbetering van de bovengrens.
J. Meerhof nam de modulus 3 in plaats van 5; dat ligt minder voor de hand, maar het voordeel is dat de regelmaat sneller te zien is!
P.X. Dillo loste deel A nog anders op, namelijk door te bewijzen dat $\binom{n}{k}$ en $\binom{n}{k+1}$ alleen dán modulo 10 gelijk kunnen zijn aan 1, als $n - 2k - 1 = 0 \pmod{10}$. Hieruit volgt onmiddellijk dat 111 niet kan voorkomen.
A. Verheul paste deze methode toe voor een willekeurige modulus!
(B.) Voor deel B kun je de computer inschakelen, maar er is een betere methode. Er geldt namelijk de volgende stelling:
Neem een rijtje cijfers mod 10. Als dit mod 2 voorkomt ergens in de driehoek modulo 2 en ook ergens in de driehoek modulo 5, dan komt het ook voor in beide driehoeken op dezelfde plaats, en dus komt het gegeven rijtje voor in de driehoek mod 10.
Deze mooie stelling werd in een of andere vorm gevonden en bewezen door H.J. Brascamp, W. Doyer, L. de Rooij en A. Verheul.

De Zomerprijzen zijn na loting toegekend aan Leo van den Raadt (20 euro) en aan H.J. Brascamp (15 euro). Gefeliciteerd!

Ladderstand

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit.
L. de Rooij 312
L. van den Raadt 257
J. Meerhof 226
W. Doyer 220
T. Kool 197
W. van den Camp 151
H.J. Brascamp 100
Zie verder ook *www.nvvw.nl/euclladder.htm*.

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de voorlopige verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

nr	verschijnt	deadline
1	15 september 2005	10 juli 2005
2	20 oktober 2005	6 september 2005
3	8 december 2005	25 oktober 2005
4	2 februari 2006	6 december 2005
5	2 maart 2006	17 januari 2006
6	13 april 2006	28 februari 2006
7	26 mei 2006	4 april 20006
8	22 juni 2006	9 mei 2006

donderdag 30 juni, UU (Uithof)
Henk Bos Valedictory Symposium
Organisatie Mathematisch Instituut

vr. 26 en za. 27 augustus, Eindhoven
vr. 2 en za. 3 september, Amsterdam
Vakantiecursus 2005
Organisatie CWI

do. 15 t/m za. 17 september, Utrecht
Symposium Freudenthal 100
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 23 september, RU Nijmegen
Wiskundetoernooi voor scholieren
Organisatie Faculteit NWI

vrijdag 7 oktober, VU Amsterdam
BWI-middag (bedrijfswiskunde en informatica)
Organisatie Faculteit der Exacte Wetenschappen

wo. 19 t/m wo. 26 oktober
WetenWeek 2005
Organisatie NEMO

zaterdag 5 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag NVvW

vrijdag 25 november, op de scholen
A-lympiade en B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html